# Intégrales Curvilignes

## Exercices

Sauf si autrement indiqué, dans les exercices suivants, l'orientation des courbes est dans le sens trigonométrique.

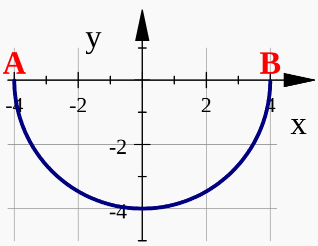
**Exercice 1**

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

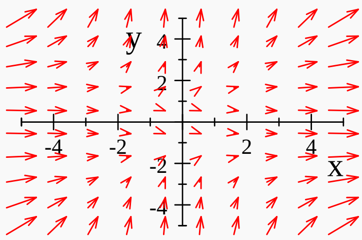
1. $\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$ ; $\overrightarrow{F} = (x^2+1)\ \overrightarrow{i} + (y^2-1)\ \overrightarrow{j}$ et $(C)$ le demi-cercle allant de $A(-4,0)$ à $B(4,0)$
2. $\int_C xdx + dy$ ; $(C)$ la branche parabolique $y = x^2$ entre $A(-2,4)$ et $B(2,4)$
3. $\int_C 2xd\ell$, $(C)$ le demi cercle, $x \leq 0$, de centre $O$ et de rayon 1
4. $I = \int_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr}$ avec $\overrightarrow{V} = (xy+z)\ \overrightarrow{i} + (x^2y+2)\ \overrightarrow{j} + (x)\ \overrightarrow{k}$ .
   $(C)$ est l'arc joignant les points $A(c,c,h)$ et $B\left(2c, \frac{1}{2}c, h\right)$ défini par $2y = 3c - x$, $z = h$ ; $c$ et $h$ sont des constantes données.
5. $\int_{AB} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$ où $\overrightarrow{H} = (z^2+2xy)\ \overrightarrow{i} + (x^2+2yz)\ \overrightarrow{j} + (y^2+2zx)\ \overrightarrow{k}$
   $AB$ est une courbe joignant les points $A(1,1,1)$ et $B(1,2,2)$ .
6. $\oint_C (x^2+3y^2-2xy)\, d\ell$ où $(C)$ est le cercle unité.
7. $\int_C (x+y)\, dy$ $(C)$ est l'ellipse $4x^2 + y^2 = 4$

**SOLUTION 1**

1. $(C)$ est le demi cercle inférieure. En coordonnées polaires : $x = 4\cos\theta$, $y = 4\sin\theta$, donc $dx = -4\sin\theta d\theta$ et $dy = 4\cos\theta d\theta$ $\left(\text{sur } \widetilde{AB} \text{ on a } r = R = 4,\ \theta_A = \pi,\ \theta_B = 2\pi\right)$




$(C)$




lignes du champ $\overrightarrow{F}$

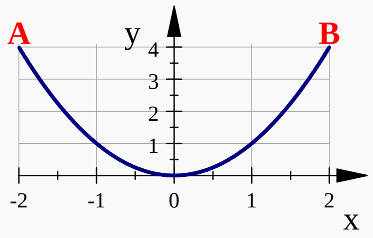
$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_C (x^2+1)\, dx + (x^2-1)\, dy$$

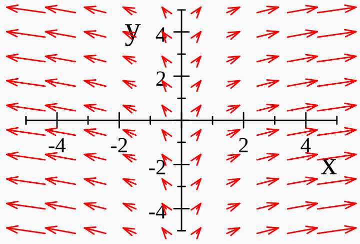
$$= \int_\pi^{2\pi} \left((16\cos^2\theta+1)(-4\sin\theta) + (16\sin^2\theta-1)(4\cos\theta)\right) d\theta$$

$$= 4\int_\pi^{2\pi} \left(-16\cos^2\theta\sin\theta - \sin\theta + 16\sin^2\theta\cos\theta - \cos\theta\right) d\theta$$

$$= 4\left(16\frac{\cos^3\theta}{3} + \cos\theta + 16\frac{\sin^3\theta}{3} - \sin\theta\right)_{\pi}^{2\pi}$$
$$= 4\left(\frac{16}{3} + 1 - \left(-\frac{16}{3} - 1\right)\right) = \frac{152}{3}$$

2. $I = \int\limits_C xdx + dy$



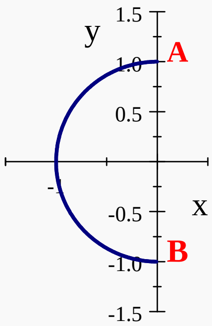




$(C)$ lignes du champ $\overrightarrow{F}$

On considère $x$ comme paramètre : $y = x^2 \Longrightarrow dy = 2xdx$ et $-2 \leq x \leq 2$

$$I = \int\limits_C xdx + dy = \int\limits_{-2}^{2} (xdx + 2xdx) = 3\int\limits_{-2}^{2} xdx = 0.$$

3. $(C)$ le demi cercle, $x \leq 0$, de centre $O$ et de rayon 1




En coordonnées polaires : $x = \cos\theta, y = \sin\theta,$
donc $dx = -\sin\theta d\theta$ et $dy = \cos\theta d\theta$
$\left(\text{sur } \widetilde{AB} \text{ on a } r = 1,\ \theta_A = \pi/2,\ \theta_B = 3\pi/2\right)$
$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\sin^2\theta d\theta^2 + \cos^2\theta d\theta^2} = d\theta$

$$\int\limits_C 2xd\ell = 2\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\theta d\theta = -4$$

4. $(C)$ défini par $2y = 3c - x \Longrightarrow x = 3c - 2y \Longrightarrow dx = -2dy, z = h \Longrightarrow dz = 0$ en allant de $A$ à $B$ $x$ varie de $x_A = c$ à $x_B = 2c$.

$$I = \int\limits_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{C=A\to B} (xy + z)\,dx + \left(x^2y + 2\right)dy + (x)\,dz$$
$$= \int\limits_c^{2c} \left((y\,(3c - 2y) + h)\,(-2dy) + \left((3c - 2y)^2\,y + 2\right)dy\right)$$
$$= \int\limits_c^{2c} \left(-6cy + 4y^2 - 2h + 2 + 9c^2y + 4y^3 - 12cy^2\right)dy$$
$$= \frac{1}{6}c\left(3c^3 + 2c^2 - 12h + 12\right)$$

5. $\overrightarrow{H} = \left(z^2 + 2xy\right) \overrightarrow{i} \left(x^2 + 2yz\right) \overrightarrow{j} + \left(y^2 + 2zx\right) \overrightarrow{k}$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x \quad \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} = 2z, \quad \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 2y \Longrightarrow \overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\varphi$ et $\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = d\varphi$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = z^2 + 2xy \Longrightarrow \varphi = \int \left(z^2 + 2xy\right) dx = xz^2 + x^2y + f\left(y,z\right)$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2yz \Longrightarrow f = \int 2yzdy = y^2z + g\left(z\right)$

$\varphi = xz^2 + x^2y + y^2z + g\left(z\right)$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 2xz + y^2 + g' = y^2 + 2zx \Longrightarrow g' = 0 \Longrightarrow g = C$

$\varphi = xz^2 + x^2y + y^2z + C$

$\displaystyle\int_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_A^B d\varphi = \varphi\left(x,y,z\right)_A^B = \varphi\left(B\right) - \varphi\left(A\right)$ avec $A\left(1,1,1\right)$ et $B\left(1,2,2\right)$.

$\varphi\left(A\right) = 1 + 1 + 1 + C = C + 3 \qquad \varphi\left(B\right) = 4 + 2 + 8 + C = C + 14$

$\displaystyle\int_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \left(C + 14\right) - \left(C + 3\right) = 11$

6. $I = \displaystyle\oint_C \left(x^2 + 3y^2 - 2xy\right) d\ell$ où $(C)$ est le cercle unité.

En coordonnées polaires : $r = R = 1$

$x = \cos\theta \Longrightarrow dx = -\sin\theta d\theta \qquad y = \sin\theta \Longrightarrow dy = \cos\theta d\theta$

$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = d\theta$

$d\omega = \left(x^2 + 3y^2 - 2xy\right) d\ell = \left(\cos^2\theta + 3\sin^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta\right) d\theta$

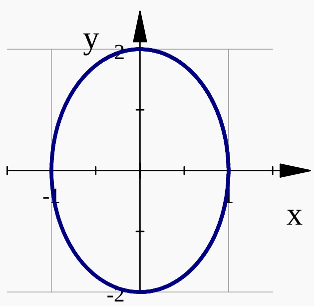
$\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$

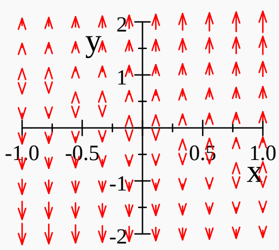
$\cos^2\theta + 3\sin^2\theta = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2} + 3\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2} = 2 - \cos 2\theta$

$\Longrightarrow d\omega = \left(2 - \cos 2\theta - \sin 2\theta\right) d\theta$

$I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(2 - \cos 2\theta - \sin 2\theta\right) d\theta = 4\pi$

7. $(C)$ est l'éllipse : $4x^2 + y^2 = 4 \Longrightarrow x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $\overrightarrow{H} = \left(x + y\right) \overrightarrow{j}$




lignes du champ $\overrightarrow{H}$

En coordonnées elliptiques $\left(r = 1, a = 1, b = 2\right)$ : $x = \cos\theta$, $y = 2\sin\theta$,
donc $dx = -\sin\theta d\theta$ et $dy = 2\cos\theta d\theta$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\displaystyle\int_C \left(x + y\right) dy = \int_0^{2\pi} \left(\cos\theta + 2\sin\theta\right)\left(2\cos\theta\right) d\theta = 2\int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta\right) d\theta = 2\pi$

## Exercice 2

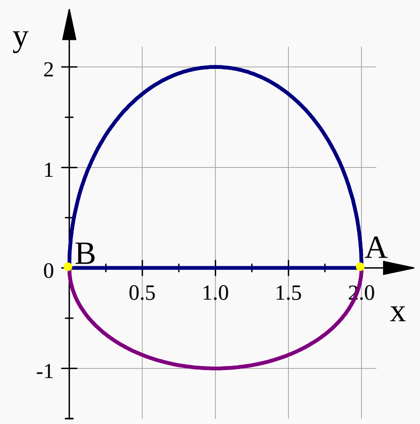
Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{AB} (x+y)\,(dx+dy)$$

où $AB$ est le chemin joignant les points $A=(2,0)$ et $B=(0,0)$ déterminé par :

1. Le segment de droite $AB$.
2. Le demi-cercle inférieur de diamètre $AB$.
3. L'arc supérieur de l'ellipse d'équation $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ parcouru de $A$ vers $B$.

## SOLUTION 2




1. Sur le segment $AB$ : $y=0 \Longrightarrow dy=0$
   donc : $(x+y)\,(dx+dy)=xdx$.
   En allant dans le sens $B \to A$, $x$ varie de $0 \to 2$

   $$\int_{C+} (x+y)\,(dx+dy)=\int_{BA} xdx=\int_0^2 xdx=2.$$

2. Le cercle est centré au point $(1,0)$ et de rayon $R=1$ son équation est : $(x-1)^2+y^2=1$
   En coordonnées polaires et sur la courbe on a :

   $$\begin{cases} x-1=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx=-\sin\theta d\theta \\ dy=\cos\theta d\theta \end{cases}$$

   En allant de $B$ vers $A$ : $\theta$ varie de $\theta_B=\pi$ à $\theta_A=2\pi$.

   $$\begin{aligned}\int_{C+} (x+y)\,(dx+dy) &= \int_\pi^{2\pi} (1+\cos\theta+\sin\theta)\,(-\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta \\ &= \int_\pi^{2\pi} \left[(-\sin\theta+\cos\theta)+\left(-\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\right] d\theta \\ &= \int_\pi^{2\pi} [-\sin\theta+\cos\theta+\cos 2\theta]\,d\theta \\ &= \left[\cos\theta+\sin\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_\pi^{2\pi}=1-(-1)=2\end{aligned}$$

3. $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ : Les longueurs des demi-axes sont $a=1$ et $b=2$
donc on pose

$$\begin{cases} x-1=\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx=-\sin\theta d\theta \\ dy=2\cos\theta d\theta \end{cases}$$

En $A$ : $\begin{cases} x=2 & \longrightarrow & \cos\theta=1 \\ y=0 & \longrightarrow & \sin\theta=0 \end{cases} \Longrightarrow \theta_A=0$

En $B$ : $\begin{cases} x=0 & \longrightarrow & \cos\theta=-1 \\ y=0 & \longrightarrow & \sin\theta=0 \end{cases} \Longrightarrow \theta_B=\pi$

$$\int_{C+}(x+y)(dx+dy)=\int_0^{\pi}(1+\cos\theta+2\sin\theta)(-\sin\theta+2\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left(-\sin\theta+2\cos\theta+2\cos^2\theta-2\sin^2\theta+3\cos\theta\sin\theta\right)d\theta$$

$$=\left[\cos\theta+2\sin\theta+\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)-\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)+\frac{3}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi}$$

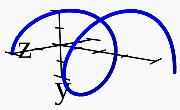
$$=(-1)-(1)=-2$$

## Exercice 3

Calculer la température moyenne d'une résistance, en forme d'une hélice, $\left(\cos t,\dfrac{t}{10},\sin t\right)$ limitée par les plans $y=0$ et $y=1$ si la distribution de température est donnée par $\sigma(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

## SOLUTION 3

La température moyenne est $\langle T\rangle=\dfrac{1}{\ell}T=\dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_C \sigma d\ell$




$$\left.\begin{array}{l} x=\cos t\Longrightarrow dx=-\sin t dt \\ y=\dfrac{t}{10}\Longrightarrow dy=\dfrac{dt}{10} \\ z=\sin t\Longrightarrow dz=\cos t dt \end{array}\right\}\Longrightarrow d\ell=\sqrt{\sin^2 t+\frac{1}{100}+\cos^2 t}dt=\frac{1}{10}\sqrt{101}dt$$

$y=0\longrightarrow t=0 \qquad y=1\longrightarrow t=10$

$$\sigma=x^2+y^2+z^2=\cos^2 t+\frac{t^2}{100}+\sin^2 t=\frac{t^2}{100}+1=\frac{t^2+100}{100}$$

$$T=\int_0^{10}\left(\frac{t^2+100}{100}\right)\frac{1}{10}\sqrt{101}dt=\frac{4}{3}\sqrt{101}$$

$$\ell=\int_C d\ell=\int_0^{10}\frac{1}{10}\sqrt{101}dt=\sqrt{101}\Longrightarrow\langle T\rangle=\frac{T}{\ell}=\frac{4}{3}$$

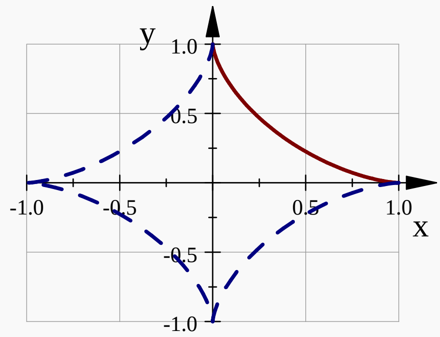
## Exercice 4

Soit $(C)$ un fil métallique, homogène, en forme de l'Astroïde d'équation paramétrique $x = \sin^3 t$ et $y = \cos^3 t$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

1. Calculer la masse de $(C)$.
2. Déterminer les coordonnées de centre de masse de $(C)$.
3. Calculer les moments d'inertie de $(C)$ en rotation autour de :

(a) L'axe $Ox$ | (b) L'axe $Oy$ | (c) L'axe $Oz$

## SOLUTION 4




1. Soit $\lambda = Ct^e$ la densité linéaire de masse.

$$m = \lambda \int_{(c)} d\ell \ \text{ avec } \ d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$x = \sin^3 t \Longrightarrow dx = 3\sin^2 t \cos t dt, \ y = \cos^3 t \Longrightarrow dy = -3\cos^2 t \sin t dt$$

$$d\ell = \sqrt{9\sin^4 t \cos^2 t + 9\cos^4 t \sin^2 t} dt = 3\sin t \cos t dt$$

$$m = 3\lambda \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = \frac{3\lambda}{2} \sin^2 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\lambda}{2}$$

2. Soit $G(X, Y)$ le centre de masse.

$$X = \frac{1}{m} \int_{(c)} x\lambda d\ell = \frac{\lambda}{m} \int_{(c)} x d\ell = \frac{3\lambda}{m} \int_0^{\pi/2} \left(\sin^3 t\right) \sin t \cos t dt = 2 \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{5}$$

$$Y = \frac{1}{m} \int_{(c)} y\lambda d\ell = \frac{\lambda}{m} \int_{(c)} y d\ell = \frac{3\lambda}{m} \int_0^{\pi/2} \left(\cos^3 t\right) \sin t \cos t dt = -2 \frac{\cos^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{5}$$

$$G\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

3. $$I_\Delta = \int_{(c)} \rho^2 dm = \lambda \int_{(c)} \rho^2 d\ell = 3\lambda \int_0^{\pi/2} \rho^2(t) \sin t \cos t dt$$

   (a) en rotation autour de l'axe $Ox$ : $\rho = y = \cos^3 t \Longrightarrow \rho^2(t) = \cos^6 t$

$$I_x = 3\lambda \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^7 t dt = -3\lambda \frac{\cos^8 t}{8} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\lambda}{8}$$

comme $m = \dfrac{3\lambda}{2}$ alors $I_x = \dfrac{m}{4}$

(b) en rotation autour de l'axe $Oy$ : $\rho = x = \sin^3 t \Longrightarrow \rho^2(t) = \sin^6 t$

$$I_y = 3\lambda \int_0^{\pi/2} \sin^7 t \cos t dt = 3\lambda \left.\frac{\sin^8 t}{8}\right|_0^{\pi/2} = \frac{3\lambda}{8} = \frac{m}{4}$$

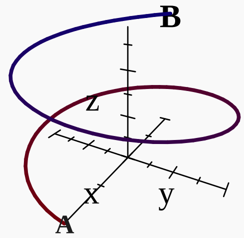
(c) en rotation autour de l'axe $Oz$ : $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$I_z = I_x + I_y = \frac{3\lambda}{4} = \frac{m}{2}$$

## Exercice 5

Calculer le travail effectué par la champ $\overrightarrow{F} = x\overrightarrow{i} - 3xy\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$ le long de l'hélice $(x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = 3t)$ entre les points $A(0,1,0)$ et $B(0,-1,9\pi)$.

## SOLUTION 5




$$\begin{cases} x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t dt \\ y = \cos t \Longrightarrow dy = -\sin t dt \\ z = 3t \Longrightarrow dz = 3dt \end{cases}$$

en $A$ : $\begin{cases} x = \sin t = 0 \\ y = \cos t = 1 \\ z = 3t = 0 \end{cases} \Longrightarrow t_A = 0$ en $B$ : $\begin{cases} x = \sin t = 0 \\ y = \cos t = -1 \\ z = 3t = 9\pi \end{cases} \Longrightarrow t_B = 3\pi$

$$W = \int_{C+} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr} = \int_{C+} xdx - 3xydy + z^2dz$$

$$= \int_0^{3\pi} \left(\sin t \cos t + 3\sin^2 t \cos t + 9t^2\right) dt = \left[\frac{\sin^2 t}{2} + \sin^3 t + 3t^3\right]_0^{3\pi} = 81\pi^3$$

## Exercice 6

On considère une particule qui se deplace dans le champ de force :

$$\overrightarrow{F} = (x - ay)\overrightarrow{i} + (3y - 2x)\overrightarrow{j}$$

en partant du point $O(0,0)$ vers le point $A(2,4)$

1. Calculer le travail reçu par la particule en fonction de $a$ :

   (a) si elle se déplace sur le segment rectiligne$[OA]$

   (b) si elle se déplace de $O$ à $A$ en suivant le trajet $O\overset{\frown}{A'}A$,où $A'$ est la projection de $A$ sur l'axe des abscisses.

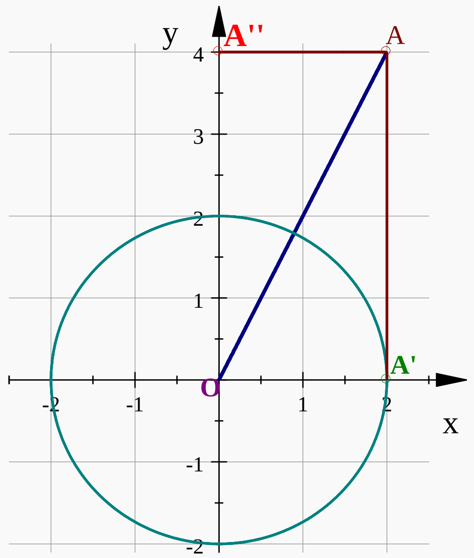
**Exercice 6 (suite)**

(c) si elle se déplace de $O$ à $A$ en suivant le trajet $O\overset{\frown}{A''}A$, où $A''$est la projection de $A$ sur l'axe des ordonnées.

(d) Conclusion ?

2. Calculer en fonction de $a$ le travail de la particule qui parcours une fois, dans le sens trigonométrique le périmètre du cercle de centre $O$ et de rayon 2.
3. Pour quelle valeur de $a$ le champ de force $\overrightarrow{F}$ dérive-t-il d'un potentiel $\varphi$.Déterminer $\varphi$. Que peut-on dire alors des travaux calculés précédemment ?

## SOLUTION 6




1. $W = \int\limits_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_C (x - ay)\, dx + (3y - 2x)\, dy$

(a) Sur le segment $[OA]$ on a $y = 2x$ donc $dy = 2dx$ et $x \in [0, 2]$
$(x - ay)\, dx + (3y - 2x)\, dy = (x - 2ax)\, dx + 2\,(6x - 2x)\, dx = (9 - 2a)\, xdx$

$$W_{O\to A} = \int\limits_0^2 (9 - 2a)\, xdx = 18 - 4a$$

(b) $O\overset{\frown}{A'}A = [OA'] \cup [A'A]$

– Sur $OA'$ : $y = 0, dy = 0$ donc $(x - ay)\, dx + (3y - 2x)\, dy = xdx$

$$W_{O\to A'} = \int\limits_0^2 xdx = 2$$

– Sur $A'A$ : $x = 2, dx = 0$ donc $(x - ay)\, dx + (3y - 2x)\, dy = (3y - 4)\, dy$ et $y \in [0, 4]$

$$W_{A'\to A} = \int\limits_0^4 (3y - 4)\, dy = 8$$

Soit $W_{O\to A'\to A} = 2 + 8 = 10$

(c) $O\overset{\frown}{A''}A = [OA''] \cup [A''A]$

– Sur $OA'$ : $x = 0, d0 = 0$ donc $(x - ay)\, dx + (3y - 2x)\, dy = 3ydy$ et $y \in [0, 4]$

$$W_{O\to A''} = \int\limits_0^4 3ydy = 24$$

– Sur $A''A$ : $y = 4, d0 = 0$ donc $(x - ay)\, dx + (3y - 2x)\, dy = (x - 4a)\, dx$ et $x \in [0, 2]$

$$W_{A'' \to A} = \int_0^2 (x - 4a)\, dx = 2 - 8a$$

Soit $W_{O \to A'' \to A} = 24 + 2 - 8a = 26 - 8a$

(d) Conclusion : le travail pour aller de $O$ à $A$ dépend du chemin suivi donc le champ de force $\overrightarrow{F}$ ne dérive pas en général d'un potentiel.

2. Sur le cercle $(\Gamma)$, on utilise les coordonnées polaires, on a donc : $x = 2\cos\theta \Longrightarrow dx = -2\sin\theta d\theta$ et $y = 2\sin\theta \Longrightarrow dy = 2\cos\theta d\theta$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$

$$dW_\Gamma = (x - ay)\, dx + (3y - 2x)\, dy$$
$$= -4\,(\cos\theta - a\sin\theta)\sin\theta d\theta + 4\,(3\sin\theta - 2\cos\theta)\cos\theta d\theta$$
$$= \left(8\cos\theta\sin\theta + 4a\sin^2\theta - 8\cos^2\theta\right) d\theta$$

$$W_\Gamma = \int_0^{2\pi} \left(8\cos\theta\sin\theta + 4a\sin^2\theta - 8\cos^2\theta\right) d\theta = 4\pi\,(a - 2)$$

3. Deux méthodes possibles :

(a) Si $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel alors il est conservatif, c'est-à-dire son travail est indépendant du chemin suivant et donc $W_{O \to A'' \to A} = W_{O \to A' \to A}$

$26 - 8a = 10$

$a = 2$

dans ce cas on aura $W_{O \to A} = W_{O \to A'' \to A} = W_{O \to A' \to A} = 10$

et $W_\Gamma = 0$ (courbe fermée)

(b) $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel si $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$

c'est-à-dire si $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \Longleftrightarrow -2 = -a \Longleftrightarrow a = 2$

$$\overrightarrow{F} = (x - 2y)\,\overrightarrow{i} + (3y - 2x)\,\overrightarrow{j} = \overrightarrow{\nabla}\varphi$$
$$\Longleftrightarrow d\varphi = (x - 2y)\, dx + (3y - 2x)\, dy$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x - 2y \Longrightarrow \varphi = \int (x - 2y)\, dx = \frac{x^2}{2} - 2xy + f(y)$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2x + f' = 3y - 2x \Longrightarrow f' = 3y \text{ et } f = \frac{3}{2}y^2 + C$$

$$\varphi = \frac{x^2}{2} - 2xy + \frac{3}{2}y^2 + C$$

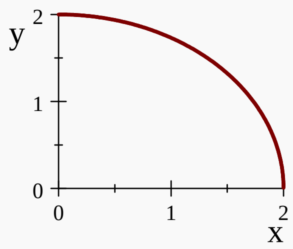
$$W_{O \to A} = \varphi(A) - \varphi(O) = \varphi(2, 4) - \varphi(0, 0) = \frac{4}{2} - 2\,(2)\,(4) + \frac{3}{2}\,(4)^2 = 10$$

## Exercice 7

Déterminer le centre de masse de l'arc du cercle matériel, $(O, 2)$ situé dans le $1^{er}$ quadrant de densité de masse linéaire $\lambda = \sqrt{x^2 + y^2}$.

## SOLUTION 7

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_C \overrightarrow{r}\lambda d\ell \quad \text{avec } m = \int_C \lambda d\ell$$




En coordonnées polaires : $r = R = 2$
$x = 2\cos\theta \Longrightarrow dx = -2\sin\theta d\theta \qquad y = 2\sin\theta \Longrightarrow dy = 2\cos\theta d\theta$
l'arc du cercle du $1^{er}$ quadrant$\longrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2d\theta \qquad \lambda = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$

$$m = \int_0^{\pi/2} 4d\theta = 2\pi$$

$$X = \frac{1}{m}\int_0^{\pi/2} x\lambda d\ell = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} (2\cos\theta)(2)(2)\, d\theta = \frac{4}{\pi}$$

$$Y = \frac{1}{m}\int_0^{\pi/2} y\lambda d\ell = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} (2\sin\theta)(2)(2)\, d\theta = \frac{4}{\pi}$$

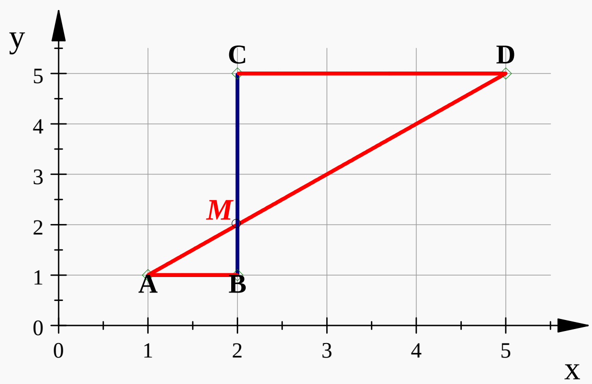
## Exercice 8

Dans le plan $(xOy)$ on considère les points : $A(1,1), B(2,1), C(2,5)$, et $D(5,5)$.

1. Une particule se déplace sous l'action du champs des forces $\overrightarrow{F} = x^2\overrightarrow{i} - 2(x+y)\overrightarrow{j}$ suivant le trajet $ABCDA$. Calculer, à l'aide d'une intégrale curviligne, le travail effectué.
2. Peut-on calculer ce travail par une autre méthode. Justifier votre réponse et recalculer le travail.

## SOLUTION 8

1. $W = \oint_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$




$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = x^2 dx - 2(x+y)\, dy$
Sur $AB : y = 1 \Longrightarrow dy = 0$ et $x : 1 \longrightarrow 2$

$$\int_{AB} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{1}^{2} x^2 dx = \frac{7}{3}$$

Sur $BC$ : $x = 2 \Longrightarrow dx = 0$ et $y : 1 \longrightarrow 5$

$$\int_{BC} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = -2\int_{1}^{5} (2+y)\, dy = -40$$

Sur $CD$ : $y = 5 \Longrightarrow dy = 0$ et $x : 2 \longrightarrow 5$

$$\int_{CD} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{2}^{5} x^2 dx = 39$$

Sur $DA$ : $x = y \Longrightarrow dx = dy$ et $x : 5 \longrightarrow 1$

$$\int_{DA} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{5}^{1} (x^2 - 4x)\, dx = \frac{20}{3}$$

$$W = \frac{7}{3} - 40 + 39 + \frac{20}{3} = 8$$

*Remarquons que $x^2dx - 2ydy$ est une différentielle totale alors*

$\oint x^2dx - 2ydy = 0$ *par suite W devient :* $W = -2\oint_{\Gamma} xdy$

*Sur AB et CD :* $dy = 0$ *donc* $W_{AB} = W_{CD} = 0$

*Sur BC* $x = 2$ *et* $y : 1 \longrightarrow 5$

$$W_{BC} = -2\int_{1}^{5} 2dy = -16$$

*Sur DA :* $x = y \Longrightarrow dx = dy$ *et* $x : 5 \longrightarrow 1$

$$W_{DA} = -2\int_{5}^{1} (x)\, dx = 24$$

$$W = -16 + 24 = 8$$

2. Le champs $\overrightarrow{F}$ n'a pas des points de discontinuité et le contour $\Gamma$ est fermé donc on peut appliquer la formule de Green-Riemann :

$$\oint_{\Gamma+} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dxdy = \iint_{\Delta} (-2)\, dxdy$$

Soit $M$ le point d'intersection des segments $BC$ et $DA$ alors le domaine $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$

$\Delta_1 = triangle\ AMB$

Pour $y$ fixé : $x$ varie de $x_m = y$ jusqu'à $x_M = 2$ et $1 \leq y \leq 2$

$$\iint_{\Delta 1} (-2)\, dxdy = -2\int_{1}^{2} \left(\int_{y}^{2} dx\right) dy = -1$$

$\Delta_2 = triangle\ CMD$

Pour $y$ fixé : $x$ varie de $x_m = 2$ jusqu'à $x_M = y$ et $2 \leq y \leq 5$

$$\iint_{\Delta 2} (-2)\, dxdy = -2\int_{2}^{5} \left(\int_{2}^{y} dx\right) dy = -9 = \int_{MDC} = -\int_{MCD}$$

donc : $W = -1 - (-9) = 8$

**Exercice 9**

Soit le champ vectoriel

$$\overrightarrow{H} = -\frac{zx}{r^3}\overrightarrow{i} - \frac{zy}{r^3}\overrightarrow{j} + \frac{x^2+y^2}{r^3}\overrightarrow{k}$$

où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif.
2. Calculer le travail effectué en allant du point $A\,(1,0,0)$ vers le point $B\,(1,1,1)$.

**SOLUTION 9**

1. $r^3 = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}$

   On a :

   $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-xz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right)$$
   $$= -xz\left(-\frac{3}{2}\right)(2x)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}$$
   $$= \frac{3xyz}{r^5} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

2. $$\frac{\partial P}{\partial z} = -x\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + z\left(-\frac{3}{2}\right)(2z)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}\right)$$
   $$= -\frac{x}{r^3} + 3x\frac{z^2}{r^5} = -x\frac{r^2-3z^2}{r^5} = -x\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^5} = \frac{\partial R}{\partial x}$$
   $$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{y\left(x^2+y^2-2z^2\right)}{r^5}$$

   donc $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif

3. Soit $\varphi = \varphi\,(x,y,z)$ tel que $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\varphi \Longleftrightarrow \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = d\varphi$

   $$\overrightarrow{H} = -\frac{zx}{r^3}\overrightarrow{i} - \frac{zy}{r^3}\overrightarrow{j} + \frac{x^2+y^2}{r^3}\overrightarrow{k}$$
   $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{zx}{r^3} = -\frac{zx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$
   $$\varphi = -\int \frac{zxdx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + g\,(y,z)$$
   $$= \frac{z}{r} + g\,(y,z)$$
   $$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + g\,(y,z)\right) = -\frac{yz}{r^3} + \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{zy}{r^3}$$
   $$\Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Longrightarrow g = g\,(z)$$
   $$\varphi = \frac{z}{r} + g\,(z)$$
   $$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{x^2+y^2}{r^3} + g' = \frac{x^2+y^2}{r^3}$$
   $$\Longrightarrow g' = 0 \Longrightarrow g = C$$

$$\varphi(M) = \frac{z}{r} + C = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$W = \int_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_A^B d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} - \frac{0}{\sqrt{1+0+0}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

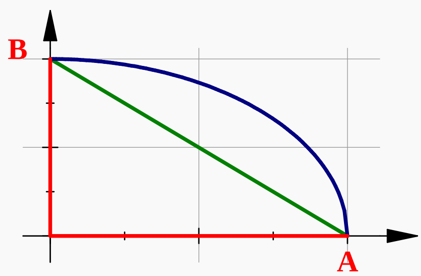
## Exercice 10

On désigne par $(C)$ la courbe joignant les points $A(1,0)$ et $B(0,1)$ du plan $xOy$, et soit $\overrightarrow{H}$ un champ vectoriel défini et continu sur $(C)$ ; $\overrightarrow{H} = y^2\,\overrightarrow{i} - x^2\,\overrightarrow{j}$

1. Démontrer que $I = \int\limits_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$ dépend du chemin parcouru entre les points $A$ et $B$
2. Calculer la valeur de l'intégrale $I$ dans les cas suivants :
   (a) $C$ est le segment de droite joignant $A$ et $B$
   (b) $C$ est l'arc du cercle centré à l'origine et de rayon 1
   (c) $C$ est la ligne brisée $BOA$
3. Déduire la valeur de l'intégrale $J = \iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, où $D$ est la région limitée par :
   (a) L'arc $AB$ et les axes des coordonnées.
   (b) Le segment $AB$ et les axes des coordonnées.
   (c) L'arc $AB$ et le segment $AB$.

## SOLUTION 10

1. On a $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2x$ donc $\overrightarrow{H}$ n'est pas un champ conservatif, par suite $\int\limits_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$ dépend du chemin parcouru entre les points $A$ et $B$.




2. $I = \int\limits_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$
   (a) L'équation de la droite $(AB)$ est : $x + y = 1 \Longrightarrow y = 1 - x \Longrightarrow dy = -dx$
   en allant dans le sens positif de $A$ vers $B$ on a $x$ varie de 1 à 0
   $\int\limits_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_C y^2dx - x^2dy = \int\limits_1^0 \left((1-x)^2 + x^2\right) dx = -\dfrac{2}{3}$

(b) en coordonnées polaires avec $r = 1$ :
$x = \cos\theta \implies dx = -\sin\theta d\theta$
$y = \sin\theta \implies dy = \cos\theta d\theta, \theta_A = 0, \theta_B = \pi/2$
$\int\limits_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_C y^2dx - x^2dy$
$= -\int\limits_0^{\pi/2} \left(\sin^3\theta + \cos^3\theta\right) d\theta = -\dfrac{4}{3}$

(c) $\int\limits_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{BO} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} + \int\limits_{OA} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$
sur $BO$ : $x = 0 \implies dx = 0$
$\implies y^2dx - x^2dy = 0 \iff \int\limits_{BO} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$
sur $OA$ : $y = 0 \implies dy = 0$
$\implies y^2dx - x^2dy = 0 \iff \int\limits_{OA} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$
Alors $\int\limits_{BOA} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$

3. Si on applique la formule de Green-Riemann :

$$\int\limits_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$I = \int\limits_C y^2dx - x^2dy = \iint\limits_D (-2x - 2y)\, dxdy$
$= -2\iint\limits_D (x + y)\, dxdy = -2J$
Par suite $J = -\dfrac{I}{2}$

(a) $C = \widetilde{AB} \cup [BO] \cup [OA]$

$$J = -\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\widetilde{AB}} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} + \int\limits_{BOA} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3} + 0\right) = \frac{2}{3}$$

(b) $C = [AB] \cup [BO] \cup [OA]$

$$J = -\frac{1}{2}\left(\int\limits_{[AB]} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} + \int\limits_{BOA} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3} + 0\right) = \frac{1}{3}$$

(c) $C = \widetilde{AB} \cup [BA]$

$$J = -\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\widetilde{AB}} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} + \int\limits_{[BA]} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

## Exercice 11

Soit le champ de vecteurs : $\overrightarrow{H} = (2xy - x^2)\ \overrightarrow{i} + (x + y^2)\ \overrightarrow{j}$

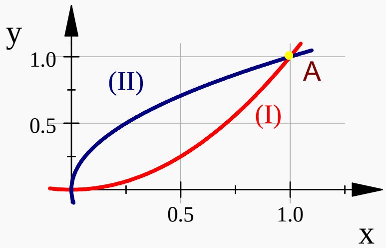
1. $\overrightarrow{H}$ est il un champ de gradient ?
2. Calculer $\oint\limits_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$ par calcul direct et à l'aide de formule de Green, où $C$ est la boucle fermée constituée par les arcs des paraboles $y = x^2$et $x = y^2$ .

## SOLUTION 11

1. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$

   donc $\overrightarrow{H}$ n'est pas un champ de gradient

2. $\int\limits_{C+} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = ?$




   (a) Calcul direct

   $$\int\limits_{C+} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{C+} \left(2xy - x^2\right) dx + \left(x + y^2\right) dy = \int\limits_{OA} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} + \int\limits_{AO} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$$

   Sur $OA_{(I)}$ : $y = x^2 \Longrightarrow dy = 2xdx$ et $x : 0 \to 1$

   $$\int\limits_{OA} \left(2xy - x^2\right) dx + \left(x + y^2\right) dy = \int\limits_0^1 \left(\left(2x^3 - x^2\right) + \left(x + x^4\right)(2x)\right) dx$$

   $$= \int\limits_0^1 \left(2x^5 + 2x^3 + x^2\right) dx = \frac{7}{6}$$

   Sur $AO_{(II)}$ : $x = y^2 \Longrightarrow dx = 2ydy$ et $y : 1 \to 0$

   $$\int\limits_{AO} \left(2xy - x^2\right) dx + \left(x + y^2\right) dy = \int\limits_1^0 \left(2y^3 - y^4\right)(2ydy) + \left(2y^2\right) dy$$

   $$= \int\limits_1^0 \left(4y^4 - 2y^5 + 2y^2\right) dy = -\frac{17}{15}$$

   $$\int\limits_{C+} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}$$

   (b) Formule de Green

   $$I = \int\limits_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_D (1 - 2x)\, dxdy$$

   Fixons $x$ on trouve que pour $x = Ct^e$ : $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ et $0 \leq x \leq 1$

   $$I = \iint\limits_D (1 - 2x)\, dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\, dy\right) dx = \int\limits_0^1 (1 - 2x)\, y|_{x^2}^{\sqrt{x}}\, dx$$

   $$= \int\limits_0^1 (1 - 2x)\left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \frac{1}{30}$$

### Exercice 12

On considère le champ vectoriel

$$\overrightarrow{F} = y^2\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$$

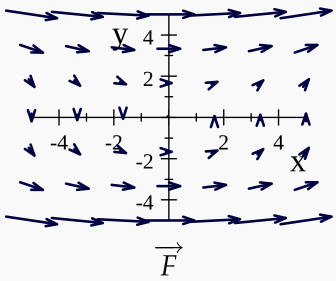
défini et continu sur la courbe fermée $C = C_1 \cup C_2$; $C_1$ est le segment joignant $A(-5, -3)$ à

**Exercice 12 (suite)**

$B(0,2)$ et $C_2$ la branche parabolique $x = 4 - y^2$

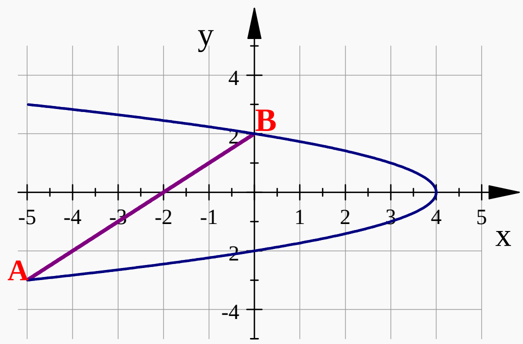
1. Donner une expression paramétrique de $AB$; $x = x(t)$, $y = y(t)$.
2. Calculer $\oint\limits_{C+} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$

SOLUTION 12




1. L'équation paramétrique de la droite $(AB)$ se détermine par l'expression :
$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = t$$
$\Longrightarrow \dfrac{y+3}{2+3} = \dfrac{x+5}{5} = t$ donc on aura :
$$\begin{cases} x = 5t - 5 \\ y = 5t - 3 \end{cases}$$

2. $\oint\limits_{C+} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \oint\limits_{C} y^2dx + xdy$ avec $C = C_1 \cup C_2$




$\oint\limits_{C} y^2dx + xdy = \int_{C_1} y^2dx + xdy + \int_{C_2} y^2dx + xdy$

sur $(C_1) = [BA]_+ : \begin{cases} x = 5t - 5 \\ y = 5t - 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = 5dt \\ dy = 5dt \end{cases}$

au point $A$ on a $\begin{cases} x = 5t - 5 = -5 \\ y = 5t - 3 = -3 \end{cases} \Longrightarrow t_A = 0$

et en $B$ $\begin{cases} x = 5t - 5 = 0 \\ y = 5t - 3 = 2 \end{cases} \Longrightarrow t_B = 1$

$y^2dx + xdy = (5t-3)^2(5dt) + (5t-5)(5dt) = 5\left(25t^2 - 25t + 4\right)dt$

$$\int\limits_{BA} y^2dx + xdy = 5\int\limits_1^0 \left(25t^2 - 25t + 4\right)dt = \frac{5}{6}$$

sur $(C_2) : x = 4 - y^2 \Longrightarrow dx = -2ydy$ et $y$ varie de $y_A = -3$ à $y_B = 2$

$$\int_{C_2} y^2dx + xdy = \int_{-3}^{2} y^2(-2ydy) + (4 - y^2)\,dy = \int_{-3}^{2} (-2y^3 + 4 - y^2)\,dy = \frac{245}{6}$$

$$\oint_C y^2dx + xdy = \frac{5}{6} + \frac{245}{6} = \frac{125}{3}$$

*Sur $BA$ on peut déterminer l'équation de la droite $y = ax + b$*

*$y = x + 2 \Longrightarrow dy = dx$ et $x$ varie de $x_B = 0$ à $x_A = -5$ dans le sens positif*

$$\int_{C_1} y^2dx + xdy = \int_{0}^{-5} (x+2)^2\,dx + xdx = \int_{0}^{-5} (x^2 + 5x + 4)\,dx = \frac{5}{6}$$

## Exercice 13

Dans le plan $xoy$ on considère le triangle $ABC$; $A(1,1)$, $B(2,2)$, et $C(1,3)$. Le champ

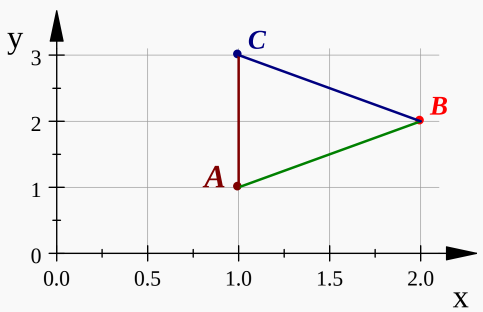
$$\overrightarrow{H} = 2(x^2 + y^2)\,\overrightarrow{i} + (x + y)^2\,\overrightarrow{j}$$

étant défini et continu sur le domaine intérieur du triangle $ABC$ et sur la frontière.

1. Calculer à l'aide d'une intégrale curviligne l'aire du triangle
2. Calculer $\oint_{ABC} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$ directement et à l'aide de formule de Green-Rieman

## SOLUTION 13

Equation de la droite $(AB) : y = x$.
Equation de la droite $(AC) : x = 1$.
Equation de la droite $(BC) : y = -x + 4$.




1. A l'aide de formule de Green-Riemann : $\oint_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$

   Si $P = -\frac{1}{2}y$ et $Q = \frac{1}{2}x$ alors $\frac{1}{2}\oint_{\Gamma+} (-ydx + xdy) = \iint_D dxdy$

   Soit $\Gamma$ la frontière du triangle $ABC$ donc $\Gamma = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$, l'aire du triangle est :

   $$\iint_D dxdy = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma+} (-ydx + xdy)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_{[AB]} -ydx + xdy + \int\limits_{[Bc]} -ydx + xdy + \int\limits_{[CA]} -ydx + xdy\right)$$

– Sur $[AB]$ : $y = x \Longleftrightarrow dy = dx$

$\Longrightarrow -ydx + xdy = -xdx + xdx = 0$

$\Longrightarrow \int\limits_{[AB]} -ydx + xdy = 0$

– Sur $[BC]$ : $y = -x + 4 \Longrightarrow dy = -dx$

$\Longrightarrow -ydx + xdy = ((x-4) - x)\, dx = -4dx$

et $x$ varie de $x_B = 2$ à $x_C = 1$ par suite

$\int\limits_{[BC]} -ydx + xdy = -4\int\limits_{2}^{1} dx = 4$

– Sur $[CA]$ : $x = 1 \Longrightarrow dx = 0$ et $y$ varie de $y_C = 3$ à $y_A = 1$

$\Longrightarrow \int\limits_{[CA]} -ydx + xdy = \int\limits_{3}^{1} dy = -2$

Finalement :

$$\iint\limits_{D} dxdy = \frac{1}{2}(0 + 4 - 2) = 1$$

**Calcul à l'aide d'une intégrale double**

$D = \{(x, y) \,/ x \leq y \leq -x + 4 \text{ et } 1 \leq x \leq 2\}$

$\iint\limits_{D} dxdy = \int\limits_{1}^{2}\left(\int\limits_{x}^{-x+4} dy\right) dx = 1$

2. $\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = 2\left(x^2 + y^2\right) dx + (x+y)^2\, dy$

(a) Par calcul direct :

$I = \oint\limits_{\Gamma+} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{[AB]} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} + \int\limits_{[BC]} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} + \int\limits_{[CA]} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$

– Sur $[AB]$ : $y = x; dy = dx$ et $1 \leq x \leq 2$

$2\left(x^2 + y^2\right) dx + (x+y)^2\, dy = 2\left(2x^2\right) dx + (2x)^2\, dx = 8x^2dx$

$\Longrightarrow \int\limits_{[AB]} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{1}^{2} 8x^2dx = \frac{56}{3}$

– Sur $[BC]$ : $y = -x + 4; dy = -dx$ avec $x$ varie de $x_B = 2$ à $x_C = 1$

$2\left(x^2 + y^2\right) dx + (x+y)^2\, dy = 2\left(x^2 + (-x+4)^2\right) dx - (x - x + 4)^2\, dx$

$= 4(x-2)^2\, dx$

par suite $\int\limits_{[BC]} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = 4\int\limits_{2}^{1} (x-2)^2\, dx = -\frac{4}{3}$

– Sur $[CA]$ : $x = 1 \Longrightarrow dx = 0$ et $y$ varie de $y_C = 3$ à $y_A = 1$

$2\left(x^2 + y^2\right) dx + (x+y)^2\, dy = 2\left(1 + y^2\right)(0) + (1+y)^2\, dy = (1+y)^2\, dy$

$\int\limits_{[Bc]} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{3}^{1} (1+y)^2\, dy = -\frac{56}{3}$

$I = \frac{56}{3} - \frac{4}{3} - \frac{56}{3} = -\frac{4}{3}$

(b) Formule de Green-Riemann :

$$\frac{\partial O}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2\left(x+y\right) - 4y = 2x - 2y$$

$$\oint_{\Gamma+} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = 2 \iint_{D} \left(x-y\right) dxdy = 2\int_{1}^{2} \left( \int_{x}^{-x+4} \left(x-y\right) dy \right) dx = -\frac{4}{3}$$

## Exercice 14

Au point $M\left(x,y,z\right)$ on fait associer le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V} = 6\left(1+x^2\right)\varphi\left(x\right)\overrightarrow{i} - 12xy\varphi\left(x\right)\overrightarrow{j} - 6z\overrightarrow{k}$$

1. Déterminer la fonction $\varphi\left(x\right)$ d'une manière que le champ $\overrightarrow{V}$ soit un champ de rotationnel ;
2. On suppose que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{W}$ et

$$\overrightarrow{W} = P\left(x,y,z\right)\overrightarrow{i} + Q\left(x,y,z\right)\overrightarrow{j}$$

   Déterminer $\overrightarrow{W}$ sachant que $\overrightarrow{W}\left(x,y,0\right) = \overrightarrow{0}$.
3. Calculer $\oint_{C} \overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{dr}$ ; $C$ est le cercle d'équation : $y^2+z^2=25$, du plan $x=3$.

## SOLUTION 14

1. $\overrightarrow{V}$ est un champ de rotationnel si $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$

$$V_x = 6\left(1+x^2\right)\varphi\left(x\right) \Longrightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x} = 12x\varphi + 6\left(1+x^2\right)\varphi'$$

$$V_y = -12xy\varphi\left(x\right) \Longrightarrow \frac{\partial V_y}{\partial y} = -12x\varphi$$

$$V_z = -6z \Longrightarrow \frac{\partial V_z}{\partial z} = -6$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = 12x\varphi + 6\left(1+x^2\right)\varphi' - 12x\varphi - 6 = 6\varphi'\left(x^2+1\right) - 6$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = 0 \Longleftrightarrow 6\varphi'\left(x^2+1\right) - 6 = 0 \Longrightarrow \varphi' = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow \varphi\left(x\right) = \arctan x$$

$$\overrightarrow{V} = 6\left(1+x^2\right)\arctan x\,\overrightarrow{i} - 12xy\arctan x\,\overrightarrow{j} - 6z\overrightarrow{k}$$

2. $\overrightarrow{W} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{W} = -\frac{\partial Q}{\partial z}\overrightarrow{i} - \frac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{W} = \overrightarrow{V} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial z} = -6\left(1+x^2\right)\arctan x \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 12xy\arctan x \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -6z \end{cases}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -6\left(1+x^2\right)\arctan x \Longrightarrow Q = -6z\left(1+x^2\right)\arctan x + f\left(x,y\right)$$

$\frac{\partial P}{\partial z} = 12xy \arctan x \Longrightarrow P = 12xyz \arctan x + g(x,y)$
$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \left(-6z - 12xz \arctan x + \frac{\partial f}{\partial x}\right) - \left(12xz \arctan x - \frac{\partial g}{\partial y}\right) = -6z$
$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 0$
Donc $\overrightarrow{W} = (12xyz \arctan x + g(x,y))\,\overrightarrow{i} + \left(-6z\left(1+x^2\right)\arctan x + f(x,y)\right)\overrightarrow{j}$
Or $\overrightarrow{W}(x,y,0) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow g\,\overrightarrow{i} + f\,\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow f = g = 0$

$$\overrightarrow{W} = 12xyz \arctan x\,\overrightarrow{i} - 6z\left(1+x^2\right)\arctan x\,\overrightarrow{j}$$

3. Notons tout d'abord que $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{W} = \overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{W}$ n'est pas conservatif.
$\overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{dr} = 12xyz \arctan x dx - 6z\left(1+x^2\right)\arctan x dy$
dans le plan $x = 3 : dx = 0$
$\overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{dr} = -(60 \arctan 3)\, zdy$
en coordonnées polaires sur le cercle $y^2 + z^2 = 25$ et $(x = 3)$ :
on pose $y = r\cos\theta = 5\cos\theta \Longrightarrow dy = -5\sin\theta d\theta$ et $z = r\sin\theta = 5\sin\theta$
$\overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{dr} = -60 \arctan 3 \times 5\sin\theta \times (-5\sin\theta d\theta) = 1500 \arctan 3 \sin^2\theta d\theta$
$\oint_C \overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{dr} = 1500 \arctan 3 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = 1500\pi \arctan 3$

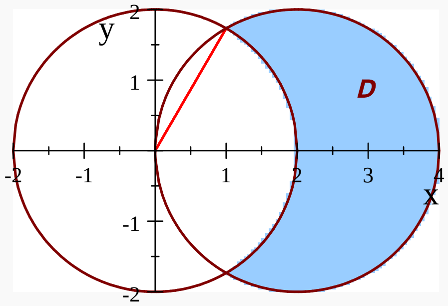
## Exercice 15

Soit le champ vectoriel $\overrightarrow{H} = y^2\,\overrightarrow{i} + \left(x^2 + 2xy\right)\overrightarrow{j}$ défini sur la courbe $(C)$ frontière de la zone limitée par l'intérieur du cercle $C_1 : (x-2)^2 + y^2 = 4$ , l'extérieur du cercle $C_2 : x^2 + y^2 = 4$ et $x \geq 0$ .

1. Le champ $\overrightarrow{H}$ est-il un champ de gradient ?. Justifier votre réponse.
2. Calculer $I = \int_C \overrightarrow{H}.\overrightarrow{dM}$.
   (a) Par calcul direct.
   (b) A l'aide de formule de Green-Riemann.

## SOLUTION 15

1. $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = 2x\,\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{H}$ n'est pas un champ de gradient.
2. La courbe $(C)$ frontière est illustrée sur la figure ci-dessous.




(a) $I = \int_C \overrightarrow{H}.\overrightarrow{dM} = \oint_C \left(y^2dx + \left(x^2 + 2xy\right)dy\right)$

$= \oint_C y^2dx + 2xydy + \oint_C x^2dy$

$y^2dx + 2xydy$ est une différentielle totale donc $\oint_C y^2dx + 2xydy = 0$ et par suite $I = \oint_C x^2dy$

$\int_C x^2dy = \int_{C1} x^2dy + \int_{C2} x^2dy$

En coordonnées polaires :

**Sur** $C_1$: si on prend $\theta$ l'angle que fait un rayon avec l'axe $Ox$ alors on pose $x - 2 = 2\cos\theta \Longrightarrow x = 2(1+\cos\theta), y = 2\sin\theta \Longrightarrow dy = 2\cos\theta d\theta$ avec $-\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$

$x^2dy = 4(1+\cos\theta)^2(2\cos\theta)d\theta = 8\left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right)\cos\theta d\theta$

$= 8\left(\cos\theta + 2\cos^2\theta + \left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta\right)d\theta$

$= 8\left(\cos\theta + 1 + \cos 2\theta + \left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta\right)d\theta$

$I_1 = \int_{C1} x^2dy = 8\int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} \left(\cos\theta + 1 + \cos 2\theta + \left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta\right)d\theta$

$= 16\int_{0}^{2\pi/3} \left(\cos\theta + 1 + \cos 2\theta + \left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta\right)d\theta$ (la fonction à integrer est paire)

$= 16 \sin\theta + \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} + \sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\Big|_0^{2\pi/3}$

On a : $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Donc : $I_1 = 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\left(\sqrt{3}/2\right)^3}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi + 10\sqrt{3}$

**Sur** $C_2$ : $x = 2\cos\theta$ , $y = 2\sin\theta \Longrightarrow dy = 2\cos\theta d\theta$ et $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

Alors :

$\int_{C2} x^2dy = \int_{\pi/3}^{-\pi/3} (2\cos\theta)^2 2\cos\theta d\theta = 8\int_{\pi/3}^{-\pi/3} \cos^3\theta d\theta = -16\int_0^{\pi/3} \cos^3\theta d\theta$

$= -16\int_0^{\pi/3} \left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta = -16\left(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi/3}$

$$= -16\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right) = -6\sqrt{3}$$

Finalement :

$$\int_C x^2 dy = \frac{32}{3}\pi + 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = \frac{32}{3}\pi + 4\sqrt{3}$$

Si on ultlise sur $C_1$ $\begin{cases} r = 4\cos\theta \Longrightarrow x = r\cos\theta = 4\cos^2\theta \\ y = r\sin\theta = 4\cos\theta\sin\theta = 2\sin 2\theta \Longrightarrow dy = 4\cos 2\theta d\theta \end{cases}$

avec $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

on trouve $\int_{C1} x^2 dy = 64 \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^4\theta \cos 2\theta d\theta$

$$\cos^4\theta\cos 2\theta = \left(\cos^2\theta\right)^2 \cos 2\theta = \frac{(1+\cos 2\theta)^2}{4}\cos 2\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta\right)\cos 2\theta = \frac{1}{4}\left(\cos 2\theta + 2\cos^2 2\theta + \cos^3 2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos 2\theta + 1 + \cos 4\theta\right) + \frac{1}{4}\left(1-\sin^2 2\theta\right)\cos 2\theta$$

$$I_1 = 64\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^4\theta\cos 2\theta d\theta = 128\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos^4\theta\cos 2\theta d\theta$$

$$= 128\,\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta + \frac{\sin 4\theta}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin^3 2\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/3}$$

$$= 128\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{3}/2\right)^3}{3}\right)\right) = \frac{32}{3}\pi + 10\sqrt{3}$$

(b) La courbe $(C)$ limite un domaine $(D)$ dans le plan $xoy$ où le champ $\overrightarrow{H}$ est continue en tout point de $(D)$ .

La formule de Green-Reimann s'écrit :

$$I = \int_C \overrightarrow{H}.\overrightarrow{dM} = \int_C y^2 dx + \left(x^2 + 2xy\right) dy$$

$$= \iint_D \left(2x + 2y - 2y\right) dxdy = \iint_D 2x dxdy$$

En coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$ , $y = r\sin\theta$ , $dxdy = rdrd\theta$ ;

$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ et $2 \leq r \leq 4\cos\theta$ alors :

$$I = \iint_D 2r^2\cos\theta\, drd\theta = 2\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\int\limits_{2}^{4\cos\theta} r^2 dr\cos\theta d\theta$$

$$= 4\int\limits_{0}^{\pi/3}\int_2^{4\cos\theta} r^2 dr\cos\theta d\theta = 4\sqrt{3} + \frac{32}{3}\pi$$

**Exercice 16**

La force de répulsion entre deux charges électriques($q$ et $Q; Q > q$) de même polarité est donnée

**Exercice 16 (suite)**

par la loi de Coulombe

$$\overrightarrow{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$

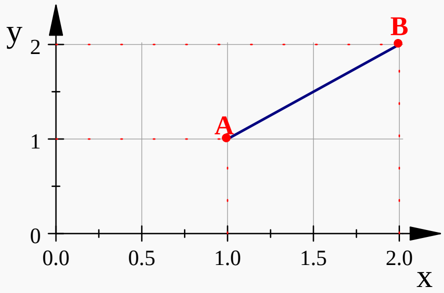
avec $\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$

1. Calculer le travail $W$ effectué par la charge $q$ en se deplacant sur le segment $AB$ ; $A\,(1,1,0)$ et $B\,(2,2,0)$
2. On considère les points $C\,(2,0,0)$ et $D\,(1,0,0)$ et le champ : $\overrightarrow{V} = \frac{-y}{2}\overrightarrow{i} + \frac{x}{2}\overrightarrow{j}$ Calculer l'intégrale curviligne $\oint\limits_{ABCDA} \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr}$

## SOLUTION 16

$$\overrightarrow{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$

1. $W = \int\limits_{AB} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int\limits_{AB} \frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\cdot\overrightarrow{dr}$




Le segment $AB$

Sur $AB$; $A\,(1,1,0)$ et $B\,(2,2,0)$ on a $x = y$ et $z = 0 \Longrightarrow dz = 0$ et $dx = dy$

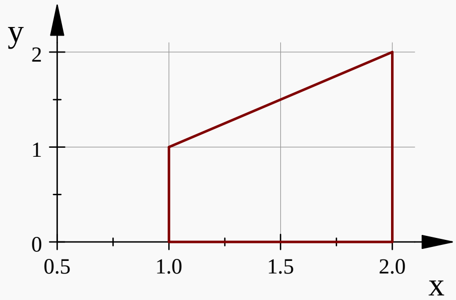
$$W = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\int\limits_{AB}\frac{xdx + ydy + zdz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\int\limits_1^2\frac{2xdx}{\left(\sqrt{2x^2}\right)^3}$$

$$= \frac{qQ}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon}\int\limits_1^2\frac{dx}{x^2} = \frac{qQ}{16\pi\varepsilon}\sqrt{2}$$

2. $\overrightarrow{V} = \frac{-y}{2}\overrightarrow{i} + \frac{x}{2}\overrightarrow{j} \Rightarrow \oint\limits_{ADCBA}\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr} = \oint\limits_{ADCBA}\left(\frac{-y}{2}dx + \frac{x}{2}dy\right)$

   (a) Par calcul direct

   $$\oint\limits_{ADCBA} = \int\limits_{AD} + \int\limits_{DC} + \int\limits_{CB} + \int\limits_{BA}$$




La courbe $ABCDA$

Sur $AD$ : $x = 1 \Rightarrow dx = 0$ $y$ varie de 1 à 0

$$\int_{DA} \left( \frac{-y}{2} dx + \frac{x}{2} dy \right) = \int_1^0 \frac{1}{2} dy = -\frac{1}{2}$$

Sur $DC$ : $y = 0 \Rightarrow dy = 0$ et $x$ varie de 1 à 2 :

$$\Rightarrow \int_{DC} \left( \frac{-y}{2} dx + \frac{x}{2} dy \right) = 0$$

Sur $CB$ : $x = 2 \Rightarrow dx = 0$ , $y$ varie de 0 à 2

$$\Rightarrow \oint_{CB} \left( \frac{-y}{2} dx + \frac{x}{2} dy \right) = \int_0^2 \left( \frac{2}{2} dy \right) = \int_0^2 dy = 2$$

Sur $BA$ : $x = y \Rightarrow dx = dy \Rightarrow \dfrac{-ydx + xdy}{2} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{BA} = 0$

$$\oint_{ABCDA} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

(b) Par formule de Green

$$\oint_{ADCBA} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{2} \right) \right) dxdy$$

$$= \iint_{\Gamma} dxdy = \int_1^2 \left( \int_0^x dy \right) dx = \frac{3}{2}$$

## Exercice 17

Soit le champ vectoriel : $\overrightarrow{V} = (x - z) \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + \beta x \overrightarrow{k}$.

1. Calculer le travail de $\overrightarrow{V}$ le long des chemins $\Gamma_i$, allant de $O$ à $Q(-2, 0, 1)$ dans le sens positif, lorsque :
   (a) $\Gamma_1$ est l'arc d'hélice : $x = \cos \pi t - 1, y = \sin \pi t, z = t$
   (b) $\Gamma_2$ est l'arc de parabole située dans le plan $xoz$ d'équation $4z = x^2$
   (c) $\Gamma_3$ est la ligne brisée $OABQ$; $A\,(0, 1, 0)$ , $B\,(-2, 1, 0)$
2. Pour quelle valeur de $\beta$ le travail de $\overrightarrow{V}$ ne dépend-il que des extrémités du chemin ?
3. Calculer le travail de $\overrightarrow{V}$ le long d'un chemin allant de $O$ à $P\,(x, y, z)$?
4. Quelle est alors la valeur du travail lorsque $P \equiv Q$.

## SOLUTION 17

$\overrightarrow{V} = (x-z)\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + \beta x\,\overrightarrow{k}$.

1. $W = \oint\limits_{\Gamma} \vec{V}.\,d\vec{r} = \oint\limits_{\Gamma} (x-z)\,dx + ydy + \beta xdz$

   $= \int\limits_{\widetilde{OQ}} (x-z)\,dx + ydy + \beta xdz$

   (a) Sur $\Gamma_1 : x = \cos \pi t - 1 \Longrightarrow dx = -\pi \sin \pi t dt$

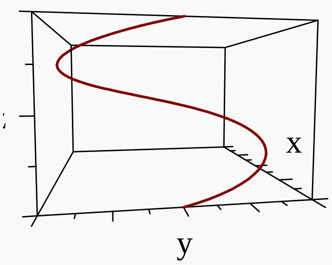
   $y = \sin \pi t \Longrightarrow dy = \pi \cos \pi t dt$

   et $z = t \Longrightarrow dz = dt$

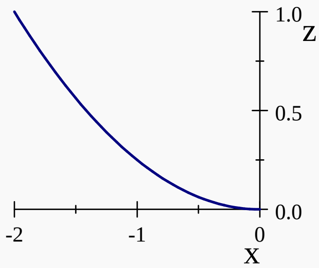
   en $O : t = 0$ et en $Q : t = 1 \Longrightarrow$

   $W = \int\limits_0^1 ((\cos \pi t - 1 - \sin \pi t)(-\pi \sin \pi t) + \pi \sin \pi t \cos \pi t + \beta(\cos \pi t - 1))\,dt$

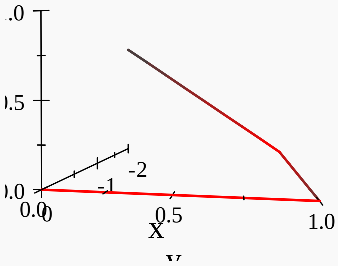
   $= \int\limits_0^1 \left(\left(\pi \sin \pi t + \pi \sin^2 \pi t\right) + \beta(\cos \pi t - 1)\right) dt = 2 - \beta + \frac{1}{2}\pi$




$(\Gamma_1)$




$(\Gamma_2)$




$(\Gamma_3) = OABQ$

   (b) $(\Gamma_2)$ est dans le plan $xoz \Longrightarrow y = dy = 0$ et $4z = x^2$

   $\Longrightarrow dz = \dfrac{xdx}{2}$ En $O : x = z = 0$ en $Q : x = 2$

   $\Longrightarrow \int\limits_{\widetilde{OQ}} (x-z)\,dx + ydy + \beta xdz = \int\limits_0^{-2} \left(x - \dfrac{x^2}{4}\right) dx + +\beta x^2 \dfrac{dx}{2}$

   $= \int\limits_0^{-2} \left(x - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{\beta x^2}{2}\right) dx = \dfrac{8 - 4\beta}{3}$

   (c) $(\Gamma_3) = OA \cup AB \cup BQ \Longrightarrow \int\limits_{\Gamma} \vec{V}.\,d\vec{r} = \int\limits_{OA} \vec{V}.\,d\vec{r} + \int\limits_{AB} \vec{V}.\,d\vec{r} + \int\limits_{BQ} \vec{V}.\,d\vec{r}$

   Sur $OA : x = z = 0$ et $0 \le y \le 1$

   $\Longrightarrow \int\limits_{OA} (x-z)\,dx + ydy + \beta xdz = \int\limits_0^1 ydy = \frac{1}{2}$

   Sur $AB$ $y = 1, z = 0$ et $x$ varie de $-2$ à $0$

   $\Longrightarrow \int\limits_{AB} (x-z)\,dx + ydy + \beta xdz = \int\limits_0^{-2} xdx = 2$

   Sur $BQ : y + z = 1 \Longrightarrow dy = -dz$ et $x = -2$

   $\Longrightarrow \int\limits_{BQ} (x-z)\,dx + ydy + \beta xdz = \int\limits_0^1 ((z-1) - 2\beta)\,dz = -\dfrac{1}{2} - 2\beta$

   $\int\limits_{\Gamma_3} \vec{V}.d\vec{r} = \dfrac{1}{2} + 2 - \dfrac{1}{2} - 2\beta = 2 - 2\beta$

2. $\oint\limits_{\Gamma} \vec{V}.\,d\vec{r}$ est indépendante du chemin si $\overrightarrow{V} = (x-z)\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + \beta x\,\overrightarrow{k}$ est un champ de gradient ( champ conservatif ) .

Si $\overrightarrow{V} = (a, b, c)$ alors dans ce cas on aura :

$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x}$ et $\frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y}$

$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial (x-z)}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial (x-z)}{\partial z} = -1 \qquad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial (\beta x)}{\partial x} = \beta$

$\frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial \beta x}{\partial y} = \beta'_y x$

Alors il faut que $\beta = -1$ et $\beta'_y = 0$ alors $\overrightarrow{V}$ est champ conservatif si $\beta = -1$

et par suite :$\exists \varphi = \varphi(x, y, z)$ tel que

$\overrightarrow{V} = (x-z)\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} - x\overrightarrow{k} = \overrightarrow{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\overrightarrow{k}$

3. $\int_\Gamma \vec{V}.d\vec{r} = \oint_\Gamma (x-z)\,dx + ydy + \beta xdz$

$= \int_{OP} (x-z)\,dx + ydy + \beta xdz = \int_{OP} d\varphi = \varphi(P) - \varphi(O)$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (x-z) \Longrightarrow \varphi = \frac{1}{2}x^2 - xz + f(y,z)$

$y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f'_y \Longrightarrow f(y,z) = \frac{1}{2}y^2 + g(z) \Longrightarrow \varphi = \frac{1}{2}x^2 - xz + \frac{1}{2}y^2 + g(z)$

$-x = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -x + g' \Longrightarrow g = c$

$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 - xz + \frac{1}{2}y^2 + c$

$\int_{OP} d\varphi = \varphi(P) - \varphi(O) = \frac{1}{2}x^2 - xz + \frac{1}{2}y^2$

4. $\int_{OQ} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{dr} = \int_{OP} d\varphi = \varphi(Q) - \varphi(O) = \frac{1}{2}(-2)^2 - (-2)(1) + \frac{1}{2}(0) = 4$

## Exercice 18

Le champ vectoriel $\overrightarrow{H} = xy\overrightarrow{i} - 2\left(y - z^2\right)\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ est défini et continu sur la courbe $(C)$ telle que :

$\forall M(x,y,z) \in (C)$ on a : $\overrightarrow{OM} = (1+t)\overrightarrow{i} + \left(1 - t^2\right)\overrightarrow{j} + at^2\overrightarrow{k}$ où $t$ est un paramètre,

1. $\overrightarrow{H}$ est-il un champ de gradient ?Justifier votre réponse
2. $\overrightarrow{H}$ est-il un champ de rotationnel ?Justifier votre réponse
3. Calculer le travail effectué par $\overrightarrow{H}$ le long de la courbe $(C)$ en allant du point $A(0,0,a)$ vers le point $B(3,-3,4a)$
4. Calculer la charge totale de $AB$ si la densité linéique est $\lambda = x - 1$

## SOLUTION 18

1. $\frac{\partial xy}{\partial y} = x \neq \frac{\partial \left(-2\left(y - z^2\right)\right)}{\partial x} = 0$

ou $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = -4z\overrightarrow{i} - x\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$

donc $\overrightarrow{H}$ n'est pas un champ de gradient

2. $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H} = y-1 \neq 0$ donc $\overrightarrow{H}$ n'est pas un champ de rotationnel

3. $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = (1+t)\,\overrightarrow{i} + \left(1-t^2\right)\overrightarrow{j} + at^2\,\overrightarrow{k} \Longrightarrow \overrightarrow{dr} = \left(\overrightarrow{i} - 2t\,\overrightarrow{j} + 2at\,\overrightarrow{k}\right)dt$

$\overrightarrow{H} = xy\,\overrightarrow{i} - 2\left(y-z^2\right)\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} = (1+t)\left(1-t^2\right)\overrightarrow{i} - 2\left(1-t^2-a^2t^4\right)\overrightarrow{j} + at^2\,\overrightarrow{k}$

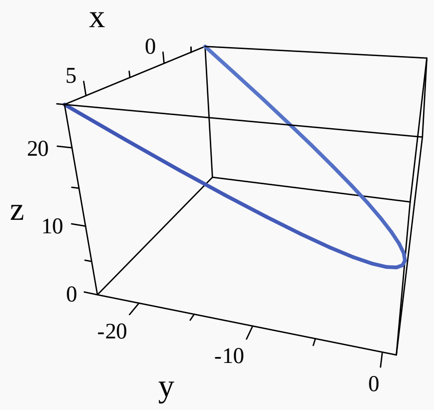
$= \left(-t^3-t^2+t+1\right)\overrightarrow{i} - 2\left(1-t^2-a^2t^4\right)\overrightarrow{j} + at^2\,\overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = \left[\left(-t^3-t^2+t+1\right) + 4t\left(1-t^2-a^2t^4\right) + 2a^2t^3\right]dt$

$= \left(-4a^2t^5 + 2a^2t^3 - 5t^3 - t^2 + 5t + 1\right)dt$

Au point $A(1,1,0)$ on a $t=0$ et au point $B(2,0,a) : t=1$

$$W = \int_{AB}\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_0^1\left(-4a^2t^5 + 2a^2t^3 - 5t^3 - t^2 + 5t + 1\right)dt = \frac{23}{12} - \frac{1}{6}a^2$$




4. $Q = \int_{AB}\lambda d\ell$

$d\ell = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{1+4t^2+4a^2t^2}dt = \sqrt{1+4\left(1+a^2\right)t^2}dt$

$\lambda = x-1 = 1+t-1 = t$

$Q = \int_0^1 t\sqrt{1+4\left(1+a^2\right)t^2}dt$

Posons $u = 1+4\left(1+a^2\right)t^2 \Longrightarrow du = 8\left(1+a^2\right)tdt \Longrightarrow tdt = \dfrac{du}{8\left(1+a^2\right)}$

$t=0 \to u=1$ et $t=1 \to u = 5+4a^2$

$$Q = \int_1^{5+4a^2}\frac{\sqrt{u}du}{8\left(1+a^2\right)} = \frac{\left(4a^2+5\right)\sqrt{4a^2+5}-1}{12\left(a^2+1\right)}$$

$$\int\frac{\sqrt{u}du}{8\left(1+a^2\right)} = \frac{u\sqrt{u}}{12\left(a^2+1\right)}$$

## Exercice 19

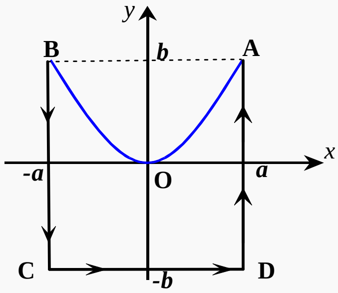
Dans l'espace rapporté aux axes $Oxyz$ on considère les points : $A(a,b,0)$, $B(-a,b,0)$, $C(-a,-b,0)$, $D(a,-b,0)$ et $M(0,0,c)$ avec $a,b,c$ sont des réels poistifs et $b=a^2$, Soit $\widehat{AOB}$ un arc parabolique .

**Exercice 19 (suite)**

1. Calculer le travail $W$ du champ $\overrightarrow{F} = x^2y\overrightarrow{i} + \mu x\overrightarrow{j}\,; \mu = ct^e$, le long de la courbe $\widetilde{AOBCDA}$ décrivée dans le sens trigonométrique à l'aide d'une intégrale curviligne
2. Peut-on calculer ce travail à l'aide d'une intégrale double, justifier la réponse et recalcluer $W$ s'il est possible
3. Vérifier que $y(x) = \dfrac{k}{x} + \dfrac{x^2}{3}$ est la solution générale de l'équation différentielle
$$x\frac{dy}{dx} + y = x^2$$
4. On suppose que $\mu = \mu(x)$. Déterminer $\mu$ tel que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire $\varphi$, avec $\overrightarrow{F}(0,0) = \overrightarrow{0}$
5. Déterminer le champ scalaire $\varphi$ et calculer le travail de $\overrightarrow{F}$, suivant un trajet allant de $A$ à $B$.

**SOLUTION 19**

1. Soit $(\Gamma) = AOBCDA = \widetilde{AOB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$




$$W = \oint_{(\Gamma)} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \oint_{(\Gamma)} \left(x^2y\overrightarrow{i} + \mu x\overrightarrow{j}\right)\cdot\left(dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j}\right) = \oint_{(\Gamma)} x^2ydx + \mu xdy$$

$$\oint_{(\Gamma)} = \int_{\widetilde{AOB}} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

– Sur l'arc $AOB$ : $y = x^2 \Longrightarrow dy = 2xdx$
$\Longrightarrow \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = x^2x^2dx + \mu x.2xdx = \left(x^4 + 2\mu x^2\right)dx$
$$\int_{\widetilde{AOB}} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_a^{-a} \left(x^4 + 2\mu x^2\right) = -\tfrac{2}{5}a^5 - \tfrac{4}{3}\mu a^3$$
– Sur $BC$ : $x = -a$ et $dx = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = -\mu ady$
$$\int_{BC} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_b^{-b} -\mu ady = 2b\mu a = 2\mu a^3$$
– Sur $CD$ : $y = -b \Longrightarrow dy = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = -bx^2dx$
$$\int_{CD} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = -b\int_{-a}^{a} x^2dx = -\tfrac{2}{3}ba^3 = -\tfrac{2}{3}a^5$$
– Sur $DA$ : $x = a$ donc $dx = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \mu ady$
$$\int_{DA} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_{-b}^{b} \mu ady = 2b\mu a = 2\mu a^3$$

Alors :

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = -\tfrac{2}{5}a^5 - \tfrac{4}{3}\mu a^3 + 2\mu a^3 - \tfrac{2}{3}a^5 + 2\mu a^3 = -\tfrac{16}{15}a^5 + \tfrac{8}{3}\mu a^3$$

2. La courbe $(\Gamma)$ limite le domaine $D$ et le champ $\overrightarrow{F}$ est continu sur $(\Gamma)$ et dans $(D)$ alors d'après la formule de Green-Riemann on peut écrire :

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_{D} (\mu - x^2)\, dxdy = \int_{-a}^{a} \left( \int_{-b}^{x^2} (\mu - x^2)\, dy \right) dx$$

$$= \tfrac{2}{3}\mu a^3 - \tfrac{2}{5}a^5 + 2b\mu a - \tfrac{2}{3}ba^3 = \tfrac{2}{3}\mu a^3 - \tfrac{2}{5}a^5 + 2\mu a^3 - \tfrac{2}{3}a^5 = -\tfrac{16}{15}a^5 + \tfrac{8}{3}\mu a^3$$

3. si $y(x) = \dfrac{k}{x} + \dfrac{x^2}{3}$ il suffit de calculer $y' = -\dfrac{k}{x^2} + \dfrac{2x}{3}$

$$x\frac{dy}{dx} + y = x\left(-\frac{k}{x^2} + \frac{2x}{3}\right) + \frac{k}{x} + \frac{x^2}{3} = x^2$$

4. Le champ $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire $\varphi$ si $\overrightarrow{\nabla}\varphi = \overrightarrow{F}$ alors $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = d\varphi$ donc

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu x) \Longrightarrow x^2 = x\frac{d\mu}{dx} + \mu$$

Pour l'équation sans second membre : $x\dfrac{d\mu}{dx} + \mu = 0$ la solution est $\mu_1(x) = \dfrac{k}{x}$ . Une solution particulière de l'équation complète , en considèrant que $k = k(x)$ , est $\mu_2(x) = \dfrac{x^2}{3}$

donc $\mu(x) = \dfrac{k}{x} + \dfrac{x^2}{3}$

alors $\overrightarrow{F} = x^2 y\,\overrightarrow{i} + \mu x\,\overrightarrow{j} = x^2 y\,\overrightarrow{i} + \left(\dfrac{k}{x} + \dfrac{x^2}{3}\right) x\,\overrightarrow{j} = x^2 y\,\overrightarrow{i} + \dfrac{x^3}{3}\overrightarrow{j}$

5. $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\overrightarrow{i} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\overrightarrow{j}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x^3}{3} \Longrightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^3 y}{3} + c(x)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x^2 y = x^2 y + c' \Longrightarrow c' = 0 \quad \text{et } c = ct^e.$$

$$\Longrightarrow \varphi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 y + C$$

$$\oint_{AB} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_{AB} d\varphi = \int_{A}^{B} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$$

$$= \varphi(-a,b) - \varphi(a,b) = -\frac{a^3 b}{3} - \frac{a^3 b}{3} = -\frac{2a^5}{3}$$

**Exercice 20**

Soit le champ vectoriel

$$\overrightarrow{H} = (2x + z)\,\overrightarrow{i} + \left(x^2 - y + xz - 1\right)\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}$$

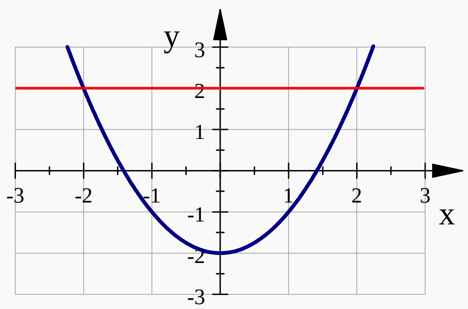
1. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$, $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}\right)$
2. Calculer le travail effectué par $\overrightarrow{H}$ sur la portion du parabole $y = x^2 - 2$ joignant les points $A(0,-2,0)$ et $B(2,2,0)$

**Exercice 20 (suite)**

3. $\overrightarrow{H}$ est -il un champ de gradient ? Justifier votre réponse.
4. Trouver une fonction $\mu(y)$ telle que $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{dr}$ soit une différentielle totale où $\overrightarrow{w} = \mu \overrightarrow{H}$
5. Trouver la fonction $\varphi(x, y, z)$ telle que $d\varphi = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{dr}$
6. Déduire le travail effectué par $\overrightarrow{w}$ en allant du point $A(1, a, a)$ vers le point $B(a, a, 1)$, et $a$ est une constante donnée.

**SOLUTION 20**

1. $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = -x\,\overrightarrow{i} + (2x+z)\,\overrightarrow{k}$
   $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = 1$
   $\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}\right) = 0$
2. graphe:




$$\int_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_C (2x+z)\,dx + \left(x^2 - y + xz - 1\right) dy + xdz$$

Sur $(C)$ $y = x^2 - 2 \Longrightarrow dy = 2xdx$ et $0 \leq x \leq 2$, $z = dz = 0$

$$\Longrightarrow \int_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_C 2xdx + \left(x^2 - y - 1\right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(2x + \left(x^2 - x^2 + 2 - 1\right) 2x\right) dx = 4\int_0^2 xdx = 8$$

3. $\overrightarrow{H} = (2x+z)\,\overrightarrow{i} + \left(x^2 - y + xz - 1\right)\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k} = P\,\overrightarrow{i} + Q\,\overrightarrow{j} + R\,\overrightarrow{k}$
   on a trouvé que $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = -x\,\overrightarrow{i} + (2x+z)\,\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{H}$ n'est pas une différentielle totale .
4. soit $\mu = \mu(y) \Longrightarrow \overrightarrow{w} = \mu\left((2x+z)\,\overrightarrow{i} + \left(x^2 - y + xz - 1\right)\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}\right)$
   $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{dr}$ est une différentielle totale si :

$$\frac{\partial\left(\mu\left(2x+z\right)\right)}{\partial y} = \mu'(2x+z) = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \mu(2x+z)$$

$$\frac{\partial \mu x}{\partial x} = \mu = \frac{\partial(2\mu x + \mu z)}{\partial z} = \mu$$

$$\frac{\partial \mu x}{\partial y} = \mu' x = \frac{\partial \mu\left(x^2 - y + xz - 1\right)}{\partial z} = x\mu$$

donc, il faut que : $\mu' = \mu$

$$\Longleftrightarrow \frac{d\mu}{dy} = \mu \Longrightarrow \frac{d\mu}{\mu} = dy \Longrightarrow \mu = e^y$$

$$\overrightarrow{w} = (2x+z)\,e^y\,\overrightarrow{i} + \left(x^2 - y + xz - 1\right)e^y\,\overrightarrow{j} + xe^y\,\overrightarrow{k}$$

est un champ de gradient

5. $d\varphi = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{dr} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\nabla\varphi} = \overrightarrow{w}$
   $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = (2x+z)\,e^y$
   $\Longrightarrow \varphi(x,y,z) = \int (2x+z)\,e^y dx = \left(x^2+zx\right)e^y + f(y,z)$
   $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \left(x^2+zx\right)e^y + \dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(x^2 - y + xz - 1\right)e^y$
   $\Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = (-y-1)\,e^y$
   $f(y,z) = \int (-y-1)\,e^y dy = -ye^y + g(z)$
   $\varphi(x,y,z) = \left(x^2+zx\right)e^y + f(y,z) = \left(x^2+zx\right)e^y - ye^y + g(z)$
   $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = xe^y + \dfrac{dg}{dz} = xe^y \Longrightarrow \dfrac{dg}{dz} = 0 \Longrightarrow g = cte = k$

$$\varphi(x,y,z) = \left(x^2 + zx - y\right)e^y + k$$

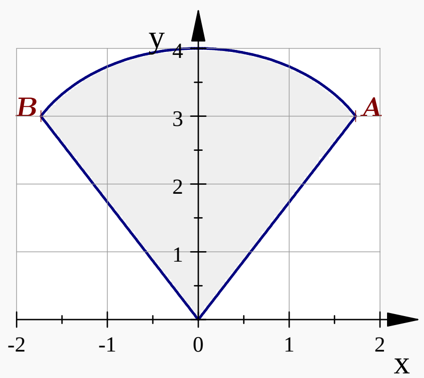
6. $\displaystyle\int_L \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{AB} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$
   $= \left(a^2 + a - a\right)e^a - (1 + a - a)\,e^a = \left(a^2 - 1\right)e^a$

## Exercice 21

On considère le domaine $D$ délimité par l'arc du cercle : $x^2 + (y-2)^2 = 4$, et les droites $y = \sqrt{3}x$ et $y = -\sqrt{3}x$

1. Calculer $(S)$ l'aire de $D$ en utilisant l'intégrale double
2. Montrer que $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\oint_C (-ydx + xdy)$ où $(C)$ est la courbe frontière de $D$
3. Calculer $(S)$ à l'aide d'une intégrale curviligne

## SOLUTION 21



1. en coordonnées polaires : $S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D rdrd\theta$

   en un point $M \in D : OM = r = 4\sin\theta$ et $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

   *En effet,*
   *l'équation de $(OA)$ est $y = \sqrt{3}x$ alors $\tan\theta_A = \frac{y_A}{x_A} = \sqrt{3} \Longrightarrow \theta_A = \frac{\pi}{3}$*
   *l'équation de $(OB)$ : $y = -\sqrt{3}x$ donc $\tan\theta_B = -\sqrt{3} \Longrightarrow \theta_B = \frac{2\pi}{3}$*

   $$S = \int_{\pi/3}^{2\pi/3}\left(\int_0^{4\sin\theta} rdr\right)d\theta = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{4\sin\theta} d\theta = 8\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\sin^2\theta d\theta$$
   $$= 4\int_{\pi/3}^{2\pi/3}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = 4\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_{\pi/3}^{2\pi/3} = 4\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - 2\left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

   on a $\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   Donc $S = \frac{4\pi}{3} - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$

2. $(C)$ est une courbe fermée limitant la zone $(D)$.
   les fonctions $P(x,y) = -y$ et $Q(x,y) = x$ sont continues sur $(C)$ et dans $(D)$
   La formule de Green-Riemann donne :

   $$\frac{1}{2}\oint_C(-ydx + xdy) = \frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_D dxdy = S$$

3. La courbe $(C)$ est $(C) = [OA] \cup \overset{\frown}{AB} \cup [BO]$

   **Sur** $[OA]$ : $y = \sqrt{3}x$ alors $dy = \sqrt{3}dx$ et $-ydx + xdy = -\sqrt{3}xdx + x\left(\sqrt{3}dx\right) = 0$

   **Sur** $[OB]$ : $y = -\sqrt{3}x$ alors $dy = -\sqrt{3}dx$ et $-ydx + xdy = \sqrt{3}xdx + x\left(-\sqrt{3}dx\right) = 0$

   **Sur** $\overset{\frown}{AB}$ : en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

   Or sur $\overset{\frown}{AB}$ : $r = 4\sin\theta$,par suite :
   $x = 4\sin\theta\cos\theta = 2\sin 2\theta \Longrightarrow dx = 4\cos 2\theta d\theta = 4\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)d\theta$
   $y = 4\sin^2\theta \Longrightarrow dy = 8\sin\theta\cos\theta d\theta = 4\sin 2\theta d\theta$
   $-ydx + xdy = \left(-16\sin^2\theta\cos 2\theta + 8\sin^2 2\theta\right)d\theta$
   et $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

   $$\oint_C = \int_{[OA]} + \int_{\overset{\frown}{AB}} + \int_{[BO]} = 0 + \int_{\overset{\frown}{AB}} + 0 = \int_{\overset{\frown}{AB}}$$

   $$S = \frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{AB}}(-ydx + xdy) = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\left(-16\sin^2\theta\cos 2\theta + 8\sin^2 2\theta\right)d\theta = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$

**Exercice 22**

Calculer le moment d'inertie d'un anneau homogène de masse $m$ et d'équation

$$(x-R)^2 + y^2 = R^2$$

en rotation autour de

1. l'axe $Oy$
2. l'axe $Ox$
3. l'axe $Oz \perp (xOy)$

## SOLUTION 22

Le moment d'inertie d'une courbe $(C)$ par rapprot à un axe $\Delta$ est donné par :

$$I_\Delta = \int_C \lambda^2 dm = \int_C \lambda^2 \sigma d\ell$$

où $\lambda$ est la distance d'un point $M(x, y)$ à l'axe $\Delta$, $\sigma$ est la densité linéaire de masse et

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

est un élément de longueur

1. Si $Oy$ est l'axe de rotation, la distance d'un point $M(x, y)$ de $(C)$ à $Oy$ est $\lambda = x$, alors

$$I_y = \sigma \oint_C x^2 d\ell = \sigma \oint_C x^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

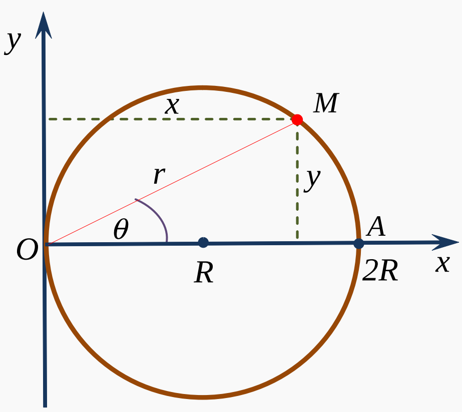
(a) **Calcul en coordonnées cartésiennes** :
On considère $x$ comme paramètre. Pour calculer $d\ell$, calculons la différentielle de l'équation du cercle.
On a $(x-R)^2 + y^2 = R^2 \Longrightarrow 2(x-R)\,dx + 2y dy = 0 \Longleftrightarrow y^2 dy^2 = (x-R)^2 dx^2$

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{(x-R)^2}{y^2} dx^2}$$

$$= \sqrt{\frac{y^2 + (x-R)^2}{y^2}} dx = \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x-R)^2}} dx$$

Alors :

$$I_y = \sigma R \oint_C \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - (x-R)^2}} dx = 2\sigma R \int_0^{2R} \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - (x-R)^2}} dx$$



*En traversant le cercle dans le sens positif, la variable $x$ varie de $2R$ en $(A)$ à 0 en $(O)$ puis de 0 en $(O)$ à $2R$ en $A$, alors $\oint_C = 2\int_0^{2R}$.*

Posons $x - R = R\sin t \iff x = R(1+\sin t)$

alors $\sqrt{R^2 - (x-R)^2} = R\cos t$ et $dx = R\cos t dt$

pour $x = 0 : t = -\frac{\pi}{2}$ et pour $x = 2R : t = \frac{\pi}{2}$,alors

$$I_y = 2\sigma R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R^2(1+\sin t)^2}{R\cos t} R\cos t dt = 2\sigma R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\sin t)^2 dt = 3\sigma\pi R^3$$

Le perimètre du cercle est $\ell = 2\pi R$, il est homogène donc sa masse est $m = 2\pi R\sigma$ on tire $\sigma = \frac{m}{2\pi R}$

$$I_y = 3\sigma\pi R^3 = 3\frac{m}{2\pi R}\pi R^3 = \frac{3}{2}mR^2$$

(b) **Calcul en coordonnées polaires :**

En coordonnées polaires on a $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, sur le cercle $r = 2R\cos\theta$ donc $x = 2R\cos^2\theta$ et $y = 2R\cos\theta\sin\theta = R\sin 2\theta$

$dx = -4R\cos\theta\sin\theta d\theta = -2R\sin 2\theta d\theta$

$dy = 2R\cos 2\theta d\theta$

$d\ell = \sqrt{(-2R\sin 2\theta d\theta)^2 + (2R\cos 2\theta d\theta)^2} = 2R d\theta$

en traversant le cercle, dans le sens positif, $\theta$ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$

$$I_y = \sigma\oint_C x^2 d\ell = 2R\sigma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4R^2\cos^4\theta d\theta = 8R^3\sigma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= 2R^3\sigma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta)\, d\theta = 2R^3\sigma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \frac{1+\cos 4\theta}{2} + 2\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= 2R^3\sigma \left(\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 4}{8} + \sin 2\theta\right)_{-\pi/2}^{\pi/2} = 3\pi R^3\sigma = \frac{3}{2}mR^2$$

2. Si $Ox$ est l'axe de rotation, la distance d'un point $M(x,y)$ de $(C)$ à $Ox$ est $\lambda = y$, alors

$$I_x = \sigma\oint_C y^2 d\ell = \sigma\oint_C y^2\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

(a) **Calcul en coordonnées cartésiennes** :

on a :

$d\ell = \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - (x-R)^2}}$ et $y^2 = R^2 - (x-R)^2$

$$I_x = 2R\sigma \int_0^{2R} \frac{R^2 - (x-R)^2}{\sqrt{R^2 - (x-R)^2}} dx = 2R\sigma \int_0^{2R} \sqrt{R^2 - (x-R)^2} dx$$

Posons $x - R = R\sin t \iff x = R(1+\sin t)$

alors $\sqrt{R^2 - (x-R)^2} = R\cos t$ et $dx = R\cos t dt$

pour $x = 0 : t = -\frac{\pi}{2}$ et pour $x = 2R : t = \frac{\pi}{2}$,alors

$$I_x = 2R\sigma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2\cos^2 t dt = 2\sigma R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \pi\sigma R^3 = \pi\left(\frac{m}{2\pi R}\right)R^3 = \frac{1}{2}mR^2$$

(b) **Calcul en coordonnées polaires :**

on a : $y = 2R\cos\theta\sin\theta = R\sin 2\theta$, $d\ell = 2Rd\theta$ et $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

$$I_x = \sigma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R\sin 2\theta)^2 (2Rd\theta) = 2\sigma R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta = \pi R^3\sigma$$

$$= \sigma R^3 \left(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right)_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi\sigma R^3$$

$$= \pi \frac{m}{2\pi R} R^3 = \frac{1}{2} m R^2$$

3. Si $Oz$ est l'axe de rotation, la distance d'un point $M(x,y)$ de $(C)$ à $O$ est$\lambda = r = \sqrt{x^2+y^2}$ alors

$$I_z = \sigma \oint_C (x^2+y^2)\, d\ell = I_x + I_y = \frac{1}{2} mR^2 + \frac{3}{2} mR^2 = 2mR^2$$

## Exercice 23

La force de Laplace à laquelle est soumis un fil $(C)$, parcouru par un courant électrique d'intensité $I$, placé dans un champ magnétique d'induction $\overrightarrow{B}$ est :

$$\overrightarrow{F} = -I \int_C \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{dr}$$

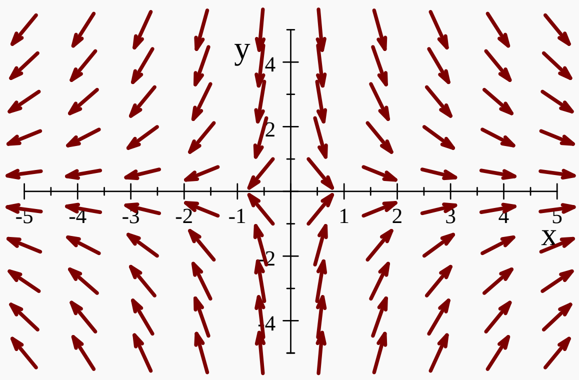
Sachant que l'induction magnétique en un point $M(x,y,z)$ est

$$\overrightarrow{B} = \alpha \frac{x\overrightarrow{i} - 2y\overrightarrow{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

calculer $\overrightarrow{F}$ si :

1. $(C)$ est le cercle $x^2+y^2 = R^2$
2. $(C)$ est le segment de droite $x = z$, pour $x \in [-1,1]$
3. $(C)$ est l'hélice $(x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = 3t)$, pour $t \in [0,\pi]$

## SOLUTION 23




lignes du champ $\overrightarrow{B}$

$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \Longrightarrow d\overrightarrow{r} = dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j} + dz\overrightarrow{k}$

$$\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{dr} = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ x & -2y & 0\\ dx & dy & dz\end{vmatrix}$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-2ydz\,\overrightarrow{i} - xdz\,\overrightarrow{j} + (xdy+2ydx)\,\overrightarrow{k}\right)$$

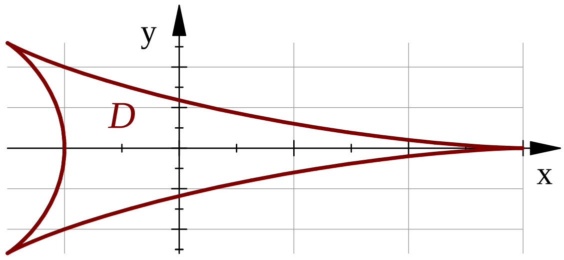
$$\overrightarrow{F} = -\alpha I\int_C \frac{-2ydz\,\overrightarrow{i} - xdz\,\overrightarrow{j} + (xdy+2ydx)\,\overrightarrow{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

1. Sur le cercle $x^2+y^2=R^2$ : $x = R\cos\theta \Longrightarrow dx = -R\sin\theta d\theta$
   $y = R\sin\theta \Longrightarrow dy = R\cos\theta d\theta$ et $z = 0 \Longrightarrow dz = 0$ et $\sqrt{x^2+y^2} = R$ et $\theta\in[0,2\pi]$
   $$\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{dr} = \alpha\frac{-2ydz\,\overrightarrow{i} - xdz\,\overrightarrow{j} + (xdy+2ydx)\,\overrightarrow{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
   $$= \alpha\frac{(R\cos\theta)(R\cos\theta d\theta) - 2(R\sin\theta)R\sin\theta d\theta}{R}\overrightarrow{k}$$
   $$= \alpha R\left(\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\right)d\theta\,\overrightarrow{k}$$
   $$\overrightarrow{F} = -\alpha RI\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\right)d\theta\,\overrightarrow{k} = -\alpha RI\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} - 1 + \cos 2\theta\right)d\theta\,\overrightarrow{k}$$
   $$= -\alpha RI\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} - \theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)_0^{2\pi}\overrightarrow{k} = \alpha\pi RI\,\overrightarrow{k}$$
2. Sur le segment de droite $x = z$ : $dx = dz$
   $y = 0 \Longrightarrow dy = 0$ et $\sqrt{x^2+y^2} = x$
   $$\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{dr} = \alpha\frac{-2ydz\,\overrightarrow{i} - xdz\,\overrightarrow{j} + (xdy+2ydx)\,\overrightarrow{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
   $$= \alpha\frac{-2\times 0\times dx\,\overrightarrow{i} - xdx\,\overrightarrow{j} + (0)\,\overrightarrow{k}}{x} = -\alpha dx\,\overrightarrow{j}$$
   $$\overrightarrow{F} = \alpha I\int_{-1}^{1}dx\,\overrightarrow{j} = \alpha Ix|_{-1}^{1}\,\overrightarrow{j} = 2\alpha I\,\overrightarrow{j}$$
3. Sur l'hélice : $x = \sin t,\quad y = \cos t,\quad z = 3t$
   $dx = \cos t dt,\ dy = -\sin t dt,\quad dz = 3dt$
   $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$
   $$\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{dr} = \alpha\frac{-2ydz\,\overrightarrow{i} - xdz\,\overrightarrow{j} + (xdy+2ydx)\,\overrightarrow{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
   $$= \alpha\left(-6\cos t\,\overrightarrow{i} - 3\sin t\,\overrightarrow{j} + \left(-\sin^2 t + 2\cos^2 t\right)\overrightarrow{k}\right)dt$$
   $$\overrightarrow{F} = 3\alpha RI\int_0^{\pi}\left((2\cos t)\,\overrightarrow{i} + (\sin t)\,\overrightarrow{j} + \left(-\sin^2 t + 2\cos^2 t\right)\overrightarrow{k}\right)dt$$
   $$= 3\alpha RI\int_0^{\pi}\left((2\cos t)\,\overrightarrow{i} + (\sin t)\,\overrightarrow{j} + \left(-\frac{1-\cos 2t}{2} + 1 + \cos 2t\right)\overrightarrow{k}\right)dt$$
   $$= 3\alpha RI\left(2\sin t\,\overrightarrow{i} - \cos t\,\overrightarrow{j} + \left(-\frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\right)_0^{\pi}$$
   $$= 3\alpha RI\left(2\,\overrightarrow{j} + \frac{\pi}{2}\overrightarrow{k}\right)$$

## Exercice 24

n considère la courbe fermée $(C)$, du plan $(xoy)$ définie les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases} \quad \text{pour } t \in [-\pi, \pi]$$




1. Calculer la longueur de $(C)$
2. Caluler le travail du champ $\overrightarrow{F} = y\,\overrightarrow{i} - x\,\overrightarrow{j}$ sur $(C)$
3. Peut-on utiliser la formule de Green-Riemann, justier la réponse. Déduire l'aire de la zone $(D)$ du plan $(xoy)$ limitée par $(C)$.

on donne : $\forall a \in \mathbb{N}: \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\sin \frac{at}{2}\right| dt = 2\int\limits_{0}^{\pi} \left|\sin \frac{at}{2}\right| dt = 4$

## SOLUTION 24

1. $d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \Longrightarrow dx = -2(\sin t + \sin 2t)\,dt \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \Longrightarrow dy = 2(\cos t - \cos 2t)\,dt \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(dx)^2 + (dy)^2 &= \left(4(\sin t + \sin 2t)^2 + 4(\cos t - \cos 2t)^2\right) dt^2 \\ &= 4\left(\sin^2 t + \sin^2 2t + 2\sin t \sin 2t + \cos^2 t + \cos^2 2t - 2\cos t \cos 2t\right) dt^2 \\ &= 4\left(\sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2 2t + \cos^2 2t + 2\sin t \sin 2t - 2\cos t \cos 2t\right) dt^2 \\ &= 8(1 - \cos 3t)\,dt^2\end{aligned}$$

$$d\ell = \sqrt{8(1-\cos 3t)}dt \Longrightarrow \ell = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{8(1-\cos 3t)}dt = 2\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{8(1-\cos 3t)}dt$$

on a $1 - \cos 3t = 2\sin^2 \frac{3t}{2} \Longrightarrow \sqrt{8(1-\cos 3t)} = \sqrt{16 \sin^2 \frac{3t}{2}} = 4\left|\sin \frac{3t}{2}\right|$

Donc $\ell = 8\int\limits_{0}^{\pi} \left|\sin \frac{3t}{2}\right| dt = 16$

2. $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = ydx - xdy = -2\left[(2\sin t - \sin 2t)(\sin t + \sin 2t) + (2\cos t + \cos 2t)(\cos t - \cos 2t)\right] dt$

$= -2\left[2\sin^2 t + 2\sin t \sin 2t - \sin t \sin 2t - \sin^2 2t + 2\cos^2 t - 2\cos t \cos 2t + \cos t \cos 2t - \cos^2 2t\right] dt$

$= -2\left[2\sin^2 t + 2\cos^2 t + 2\sin t \sin 2t - \sin t \sin 2t - \sin^2 2t - \cos^2 2t - 2\cos t \cos 2t + \cos t \cos 2t\right] dt$

$= -2\left[2 + \sin t \sin 2t - 1 - \cos t \cos 2t\right] dt$

$= -2\left[1 + \sin t \sin 2t - \cos t \cos 2t\right] dt$

$= -2\left[1 - \cos 3t\right] dt = 2(\cos 3t - 1)\,dt$

$$W = \oint\limits_{C} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos 3t - 1)\,dt = 2\left(\frac{\sin 3t}{3} - t\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -4\pi$$

3. La courbe $(C)$ est fermée, le champ $\overrightarrow{F}$ est défini et continu sur $(C)$ et dans $(D)$ , ainsi que les dérivées partielles, donc on peut utiliser la formule de Green-Riemann

$$W = \oint_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_C Pdx + Qdy$$

$$= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (-1-1)\, dxdy = -2 \iint_D dxdy$$

alors l'aire du domaine $(D)$ est $\displaystyle\iint_D dxdy = -\frac{1}{2}W = 2\pi$