Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

le cnam Liban

Opérateur hamiltonien Exercices corrigés 2

Enoncés

Exercice 1 Calculer $\operatorname{div} \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$ si $\overrightarrow{H} = r^2\theta\overrightarrow{e_r} + re^{2\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

Exercice 2 On considère la champ scalaire, φ, définie en coordonnées cylindriques :

$$\varphi(r,\theta,z) = \frac{qz\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}$$

où q et ε sont constantes.

1. Déterminer le champ de force $\overrightarrow{F}$qui dérive du potentiel scalaire φ en un point $M(r,\theta,z)$.
2. Calculer $\operatorname{div} \overrightarrow{F}$.

Exercice 3 (coordonnées cylindriques paraboliques) Soit le système de coordonnées (u,v,w) ;

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \\ z = w \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Lamé associés.
2. Déterminer les vecteurs de base $(\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}, \overrightarrow{e_w})$. Montrer que ces vecteurs sont orthonormés.
3. Déduire le jacobien J de la transformation : $(x,y,z) \to (u,v;w)$
4. Donner l'expression de l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$, en coordonnées cylindriques paraboliques.

Exercice 4 (coordonnées toriques) On considère l'ensemble des coordonnées toriques (r,φ,θ) tel que :

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\theta \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Lamé associés.
2. Déterminer les vecteurs de base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_\theta})$. Montrer que ces vecteurs sont orthonormés
3. Déduire le jacobien J de la transformation : $(x,y,z) \to (r,\varphi,\theta)$
4. Donner l'expression de l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$, en coordonnées toriques.
5. Donner l'expression de l'opérateur laplacien, en coordonnées toriques.

Exercice 5 On considère l'ensemble des coordonnées curvilignes (u, v, z) tels que :

$$\begin{cases} x = a\cosh u \cos v \\ y = a\sinh u \sin v \\ z = z \end{cases}$$

où a est une constante donnée et $u \in \mathbb{R}$, $0 \leq v \leq 2\pi, z \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les surfaces et lignes de coordonnées.
2. Calculer les coefficients de Lamé h_i.
3. Déterminer les vecteurs de base $(\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}, \overrightarrow{e_z})$ associés et montrer qu'ils sont orthonormés.
4. En déduire le jacobien de transformation.
5. Donner l'expression de l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ dans ce système.
6. Soit le champ scalaire $f(x, y, z) = \left(x^2 - y^2\right) z^6$. Exprimer f en fonction de coordonnées (u, v, z) et calculer $\overrightarrow{\nabla} f$.

Solutions

Solution 1

$\overrightarrow{H} = r^2\theta\overrightarrow{e_r} + re^{2\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

En coordonnées curvilignes (q_1, q_2, q_3), la divergence d'un champ $\overrightarrow{H} = \sum_{k=1}^{3} H_k\overrightarrow{e_k}$ est :

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3H_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2H_3)\right]$$

En coordonnées polaires (r, θ) : $h_1 = h_r = 1$ et $h_2 = h_\theta = r$ alors :

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rH_r)}{\partial r} + \frac{\partial H_\theta}{\partial\theta}\right)$$

$rH_r = r^3\theta \Longrightarrow \dfrac{\partial(rH_r)}{\partial r} = 3r^2\theta,\quad H_\theta = re^{2\theta} \Longrightarrow \dfrac{\partial H_\theta}{\partial\theta} = 2re^{2\theta}$

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H} = \frac{1}{r}\left(3r^2\theta + 2re^{2\theta}\right) = 3r\theta + 2e^{2\theta}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \overrightarrow{e_r} & r\overrightarrow{e_\theta} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & 0 \\ H_r & rH_\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right)\overrightarrow{k} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r^2e^{2\theta})}{\partial r} - \frac{\partial r^2\theta}{\partial\theta}\right)\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H} = \frac{1}{r}\left(2re^{2\theta} - r^2\right)\overrightarrow{k} = \left(2e^{2\theta} - r\right)\overrightarrow{k}$$

Solution 2

1. Le champ $\overrightarrow{F}$ dérive du potentiel scalaire φ alors $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla\varphi}$

   En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\nabla\varphi} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

   $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = -\dfrac{qz\cos\theta}{2\pi\varepsilon r^3},\qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\dfrac{qz\sin\theta}{4\pi\varepsilon r^2},\qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{q\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}$

   Soit donc :

   $\overrightarrow{F} = -\dfrac{qz\cos\theta}{2\pi\varepsilon r^3}\overrightarrow{e_r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{qz\sin\theta}{4\pi\varepsilon r^2}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{q\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}\overrightarrow{e_z} = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\left(2z\cos\theta\overrightarrow{e_r} + z\sin\theta\overrightarrow{e_\theta} - r\cos\theta\overrightarrow{e_z}\right)$

2. On pose $\overrightarrow{F} = F_r\overrightarrow{e_r} + F_\theta\overrightarrow{e_\theta} + F_z\overrightarrow{e_z}$

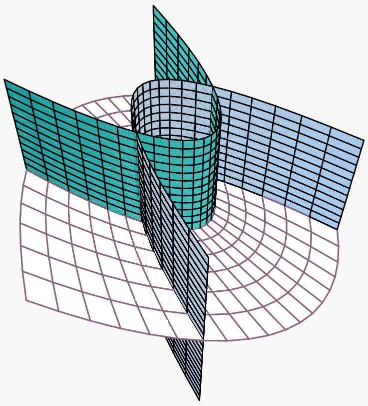
   En coordonnées cylindriques $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{F} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$

   On a $rF_r = -\dfrac{qz\cos\theta}{2\pi\varepsilon r^2} \Longrightarrow \dfrac{\partial(rF_r)}{\partial r} = \dfrac{qz\cos\theta}{\pi\varepsilon r^3},\qquad \dfrac{\partial F_\theta}{\partial\theta} = -\dfrac{qz\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^3},\qquad \dfrac{\partial F_z}{\partial z} = 0$

   Finalement $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{F} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{qz\cos\theta}{\pi\varepsilon r^3} - \dfrac{qz\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^3}\right) = \dfrac{3qz\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^4}$

Solution 3

$\overrightarrow{r} = \left(u^2 - v^2\right)\overrightarrow{i} + 2uv\overrightarrow{j} + w\overrightarrow{k}$



coordonnées cylindriques paraboliques $(u=1)$ et $w=0$

1. les coefficients de Lamé sont : $h_k = \left|\dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}\right|$

$\overrightarrow{h_u} = \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = 2u\overrightarrow{i} + 2v\overrightarrow{j} \Longrightarrow h_u = \sqrt{4u^2+4v^2} = 2\sqrt{u^2+v^2}$

$\overrightarrow{h_v} = \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = -2v\overrightarrow{i} + 2u\overrightarrow{j} \Longrightarrow h_v = 2\sqrt{u^2+v^2}$

$\overrightarrow{h_w} = \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial w} = \overrightarrow{k} \Longrightarrow h_w = 1$

2. $\overrightarrow{e_u} = \dfrac{\overrightarrow{h_u}}{h_u} = \dfrac{u\overrightarrow{i}+v\overrightarrow{j}}{\sqrt{u^2+v^2}}$

$\overrightarrow{e_v} = \dfrac{\overrightarrow{h_v}}{h_v} = \dfrac{-v\overrightarrow{i}+u\overrightarrow{j}}{\sqrt{u^2+v^2}}$

$\overrightarrow{e_w} = \dfrac{\overrightarrow{h_w}}{h_w} = \overrightarrow{k}$

$|\overrightarrow{e_u}| = |\overrightarrow{e_v}| = |\overrightarrow{e_w}| = 1$

$\overrightarrow{e_u}\cdot\overrightarrow{e_v} = \dfrac{-uv+uv}{u^2+v^2} = 0$

$\overrightarrow{e_u}\cdot\overrightarrow{e_w} = \overrightarrow{e_w}\cdot\overrightarrow{e_v} = 0$

Alors $\overrightarrow{e_u},\overrightarrow{e_v},\overrightarrow{e_w}$ sont orthonormés.

3. Le système est orthonormé . Par définition $J = h_1h_2h_3 = h_uh_vh_w = 4\left(u^2+v^2\right)$

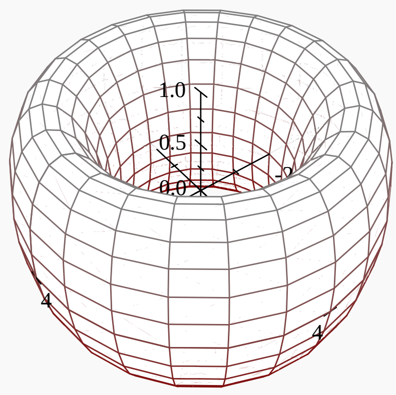
4. En coordonnées généralisées (q_1,q_2,q_3) l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ s'écrit : $\overrightarrow{\nabla} = \displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{h_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\overrightarrow{e_k}$

Alors dans le système (u,v,w) : $\overrightarrow{\nabla} = \dfrac{1}{h_u}\dfrac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{e_u} + \dfrac{1}{h_v}\dfrac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{e_v} + \dfrac{1}{h_w}\dfrac{\partial}{\partial w}\overrightarrow{e_w}$

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{e_u} + \frac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{e_v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\overrightarrow{e_w}$$

Solution 4

$\overrightarrow{\rho} = (R + r\cos\varphi)\cos\theta\,\overrightarrow{i} + (R + r\cos\varphi)\sin\theta\,\overrightarrow{j} + r\sin\varphi\,\overrightarrow{k}$



Modélisation d'un tore avec $R=3, r=1, 0\leq\varphi\leq 2\pi, 0\leq\theta\leq 2\pi$

1. Les coefficients de Lamé sont les quantités $h_k=\left|\dfrac{\partial\overrightarrow{\rho}}{\partial q_k}\right|$
   - $q_1=r$
     $\overrightarrow{h_r}=\dfrac{\partial\overrightarrow{\rho}}{\partial r}=\cos\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{i}+\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{j}+\sin\varphi\,\overrightarrow{k}$
     $h_r=\sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\theta+\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi}=1$
   - $q_2=\varphi$
     $\overrightarrow{h_\varphi}=\dfrac{\partial\overrightarrow{\rho}}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{i}-r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{j}+r\cos\varphi\,\overrightarrow{k}$
     $h_\varphi=\sqrt{(r\sin\varphi\cos\theta)^2+(r\sin\varphi\sin\theta)^2+(r\cos\varphi)^2}=r$
   - $q_3=\theta$
     $\overrightarrow{h_\theta}=\dfrac{\partial\overrightarrow{\rho}}{\partial\theta}=-\left(R+r\cos\varphi\right)\sin\theta\,\overrightarrow{i}+\left(R+r\cos\varphi\right)\cos\theta\,\overrightarrow{j}$
     $h_\theta=\sqrt{(R+r\cos\varphi)^2\sin^2\theta+(R+r\cos\varphi)^2\cos^2\theta}=R+r\cos\varphi$
2. $\overrightarrow{e_k}=\dfrac{\overrightarrow{h_k}}{h_k}$

   (i) $\overrightarrow{e_r}=\dfrac{\overrightarrow{h_r}}{h_r}=\cos\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{i}+\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{j}+\sin\varphi\,\overrightarrow{k}$
   $\overrightarrow{e_\varphi}=\dfrac{\overrightarrow{h_\varphi}}{h_\varphi}=-\sin\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{i}-\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{j}+\cos\varphi\,\overrightarrow{k}$
   $\overrightarrow{e_\theta}=\dfrac{\overrightarrow{h_\theta}}{h_\theta}=-\sin\theta\,\overrightarrow{i}+\cos\theta\,\overrightarrow{j}$

   (ii) $|\overrightarrow{e_r}|=|\overrightarrow{e_\varphi}|=|\overrightarrow{e_\theta}|=1$

   (iii) $\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_\varphi}=(\cos\varphi\cos\theta)\left(-\sin\varphi\cos\theta\right)+(\cos\varphi\sin\theta)\left(-\sin\varphi\sin\theta\right)+\sin\varphi\cos\varphi$
   $=-\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\theta-\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta+\cos\varphi\sin\varphi=0$
   $\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_\theta}=(\cos\varphi\cos\theta)\left(-\sin\theta\right)+(\cos\varphi\sin\theta)\left(\cos\theta\right)=0$
   $\overrightarrow{e_\varphi}\cdot\overrightarrow{e_\theta}=(-\sin\varphi\cos\theta)\left(-\sin\theta\right)+(-\sin\varphi\sin\theta)\left(\cos\theta\right)=0$

   Donc $\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\varphi},\overrightarrow{e_\theta}$ sont orthonormés.
3. $J=h_rh_\varphi h_\theta=1\times r\times\left(R+r\cos\varphi\right)=r\left(R+r\cos\varphi\right)$
4. En coordonnées généralisées (q_1,q_2,q_3) l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{\nabla}=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{h_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\overrightarrow{e_k}$$

En coordonnées toriques : $\overrightarrow{\nabla} = \dfrac{1}{h_r}\dfrac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{h_\varphi}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \dfrac{1}{h_\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta}$ soit :

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \frac{1}{R + r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

5. $\Delta = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_1}\left(\dfrac{h_2h_3}{h_1}\dfrac{\partial}{\partial q_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial q_2}\left(\dfrac{h_1h_3}{h_2}\dfrac{\partial}{\partial q_2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial q_3}\left(\dfrac{h_1h_2}{h_3}\dfrac{\partial}{\partial q_3}\right)\right]$

$= \dfrac{1}{r\,(R + r\cos\varphi)}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{h_\varphi h_\theta}{h_r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(\dfrac{h_r h_\theta}{h_\varphi}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{h_r h_\varphi}{h_\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]$

$h_r = 1$, $h_\varphi = r$ et $h_\theta = R + r\cos\varphi$

$\Delta = \dfrac{1}{Rr + r^2\cos\varphi}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\left(Rr + r^2\cos\varphi\right)\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(\dfrac{R + r\cos\varphi}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{r}{R + r\cos\varphi}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]$

- ♦ $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\left(Rr + r^2\cos\varphi\right)\dfrac{\partial}{\partial r}\right) = (R + 2r\cos\varphi)\dfrac{\partial}{\partial r} + \left(Rr + r^2\cos\varphi\right)\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}$
- ♦ $\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(\dfrac{R + r\cos\varphi}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\right) = -\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial \varphi} + \dfrac{R + r\cos\varphi}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$
- ♦ $\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{r}{R + r\cos\varphi}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right) = \dfrac{r}{R + r\cos\varphi}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$

$$\Delta = \frac{1}{Rr + r^2\cos\varphi}\left(\begin{array}{c} (R + 2r\cos\varphi)\dfrac{\partial}{\partial r} + \left(Rr + r^2\cos\varphi\right)\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} - \sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ + \dfrac{R + r\cos\varphi}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \dfrac{r}{R + r\cos\varphi}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{array}\right)$$

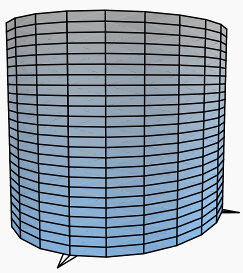
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{R + 2r\cos\varphi}{Rr + r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin\varphi}{Rr + r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{(R + r\cos\varphi)^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Solution 5

1. Etudions les surfaces et les lignes des coordonnées

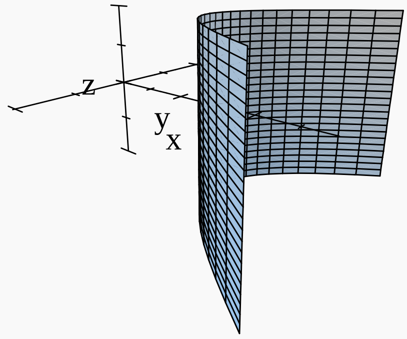
   (a) Les surfaces de coordonnées (S_k) sont les surfaces définies par $q_k = Cte$.

      i. $u = cte \longrightarrow S_u$: les cylindres elliptiques d'axe Oz et de base $\dfrac{x^2}{a^2\cosh^2 u} + \dfrac{y^2}{a^2\sinh^2 u} = 1$



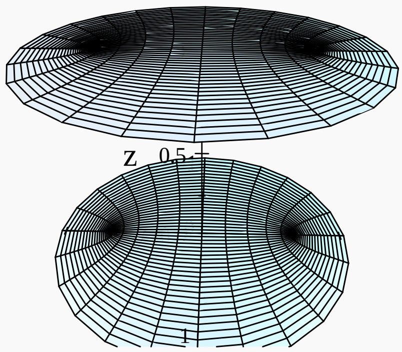
$S_u : u = 1$

      ii. $v = cte \longrightarrow S_v$: les cylindres hyperboliques $\dfrac{x^2}{a^2\cos^2 v} - \dfrac{y^2}{a^2\sin^2 v} = 1$



$$S_v : v = \frac{\pi}{3}$$

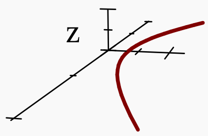
iii. $z = cte \longrightarrow S_z$ plans perpendiculaires à Oz



$$S_z : z = 0, z = 1$$

(b) Les lignes des coordonnées sont les lignes C_k telles que q_k variable et les autres coordonnées sont cte.

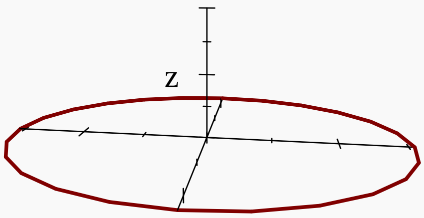
i. Les lignes $C_u \longrightarrow (v = cte, z = cte)$ sont des hyperboles situées dans les plans $z = cte$ et d'équations $\dfrac{x^2}{a^2\cos^2 v} - \dfrac{y^2}{a^2\sin^2 v} = 1$



$$v = \frac{\pi}{3}, z = 0$$

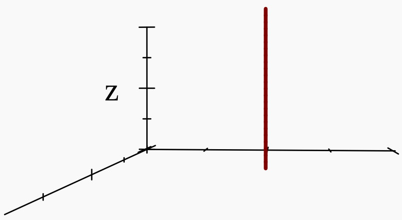
ii. Les lignes $C_v \longrightarrow (u = cte, z = cte)$ sont ellipses dans les plans $z = cte$

$(\cosh 1 \cos v, \sinh 1 \sin v, 0)$



$$u = 1, z = 0$$

iii. Les lignes $C_z \longrightarrow (u = cte, v = cte)$ sont des droites parallèles à Oz



$$u = 1, v = \frac{\pi}{3}$$

2. $\overrightarrow{r} = a\cosh u \cos v \overrightarrow{i} + a \sinh u \sin v \overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$
   $\overrightarrow{h_u} = \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = a\sinh u \cos v \overrightarrow{i} + a\cosh u \sin v \overrightarrow{j}$
   $h_u = \left|\overrightarrow{h_u}\right| = a\sqrt{\sinh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v \overrightarrow{j}}$
   comme on a $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ et $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ on trouve :
   $h_u = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$
   $\overrightarrow{h_v} = \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = -a\cosh u \sin v \overrightarrow{i} + a\sinh u \cos v \overrightarrow{j}$
   $h_v = a\sqrt{\cosh^2 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cos^2 v} = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} = h_u$
   $\overrightarrow{h_z} = \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial z} = \overrightarrow{k} \Longrightarrow h_z = 1$
3. $\overrightarrow{e_u} = \dfrac{\overrightarrow{h_u}}{h_u} = \dfrac{\sinh u \cos v \overrightarrow{i} + \cosh u \sin v \overrightarrow{j}}{\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}$
   $\overrightarrow{e_v} = \dfrac{\overrightarrow{h_v}}{h_v} = \dfrac{-\cosh u \sin v \overrightarrow{i} + \sinh u \cos v \overrightarrow{j}}{\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}$
   $\overrightarrow{e_z} = \dfrac{\overrightarrow{h_z}}{h_z} = 1$
   $\overrightarrow{e_u} \cdot \overrightarrow{e_v} = \dfrac{(\sinh u \cos v)(-\cosh u \sin v) + (\cosh u \sin v)(\sinh u \cos v)}{\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} = 0$
   $\overrightarrow{e_u} \cdot \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_v} \cdot \overrightarrow{e_z} = 0$
4. $J = h_u h_v h_z = a^2\left(\sinh^2 u + \sin^2 v\right)$
5. $\overrightarrow{\nabla} = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{h_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\overrightarrow{e_k} = \frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{e_u} + \frac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{e_v}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

6. $f(x,y,z) = \left(x^2 - y^2\right) z^6 = a^2\left(\cosh^2 u \cos^2 v - \sinh^2 u \sin^2 v\right) z^6$

On a $\sinh^2 u = \dfrac{\cosh 2u - 1}{2}$, $\cosh^2 u = \dfrac{\cosh 2u + 1}{2}$, $\sin^2 v = \dfrac{1-\cos 2v}{2}$, $\cos^2 v = \dfrac{1+\cos 2v}{2}$

alors $f = a^2 z^6 \left(\dfrac{\cosh 2u + 1}{2} \times \dfrac{1+\cos 2v}{2} - \dfrac{\cosh 2u - 1}{2} \times \dfrac{1-\cos 2v}{2}\right)$

$\dfrac{\cosh 2u + 1}{2} \times \dfrac{1+\cos 2v}{2} = \dfrac{1}{4}\left(\cosh 2u + 1 + \cosh 2u \cos v + \cos v\right)$

$\dfrac{\cosh 2u - 1}{2} \times \dfrac{1-\cos 2v}{2} = \dfrac{1}{4}\left(\cosh 2u - 1 - \cosh 2u \cos v + \cos v\right)$

$f = \dfrac{1}{2} a^2 z^6 \left(\cosh 2u \cos 2v + 1\right)$

$\overrightarrow{\nabla} f = \dfrac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\overrightarrow{e_u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\overrightarrow{e_v}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

$= \dfrac{az^6}{\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \left(\sinh 2u \cos 2v \overrightarrow{e_u} - \cosh 2u \sin 2v \overrightarrow{e_v}\right) + 3^2 z^5 \left(\cosh 2u \cos 2v + 1\right)\overrightarrow{e_z}$