Systèmes différentiels

Matrice diagonalisable

Exercice 1

En utilisant le spectre de la matrice, résoudre les systèmes différentiels suivants :
où on désigne par $q' = \dfrac{dq}{dt}$, $q = x, y, z, \cdots$

1. $\begin{cases} x' = 5x - 6y \\ y' = 3x - 4y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = -x + 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2x + z \\ z' = 2x - y \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = x + y + 2z \\ y' = 2x + y + z \\ z' = y + 3z \end{cases}$
6. $\begin{cases} x' = 4x - 3y + 9z \\ y' = -3x + 4y - 9z \\ z' = -3x + 3y - 8z \end{cases}$
7. $\begin{cases} x' = x + z \\ y' = x + y \\ z' = x + y + 2z \end{cases}$
8. $\begin{cases} x' = x + 2y + 3z \\ x' = 2y + 3z \\ z' = 3z \end{cases}$
9. $\begin{cases} x' = x + y + t \\ y' = 2x + y + 2z + e^{2t} \\ z' = y + z \end{cases}$
10. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$

Solution 1 :

Dans toutes les solutions suivantes on pose A la matrice des coefficients $Y = Y(t)$ le vecteur fonction inconnue, Y' sa dérivée et $F(t)$ le second membre tels que : $Y' = AY + F(t)$.

Les solutions à chercher sont de la forme $Y = \sum_{i=1}^{n} C_i V_i e^{\lambda_i t} + Y_p(t)$, où C_i sont des constantes, V_i les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i et $Y_p(t)$ une solution particulière.
ou bien sous la forme : $Y(t) = \varphi(t) C$ où $\varphi(t)$ est la matrice fondamentale et C un vecteur constant.

1. $\begin{cases} x' = 5x - 6y \\ y' = 3x - 4y \end{cases}$

   Le système est homogène : $Y' = AY$

   - La matrice des coefficients est $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$
   - le polynôme caractéristique est :
     $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$
   - Les valeurs propres les racines de $P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$
   - Les vecteurs propres associés sont $v_i / Av_i = \lambda_i v_i$

     Si $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ alors : $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

     $\begin{cases} 5a - 6b = -a \\ 3a - 4b = -b \end{cases} \Longrightarrow a = b$ soit $v_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, le vecteur de base est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

     La solution particulière associée est $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

     $v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \longleftrightarrow \lambda_2 = 2$

$\left\{\begin{array}{l} 5\alpha - 6\beta = 2\alpha \\ 3\alpha - 4\beta = 2\beta \end{array}\right. \Longrightarrow \alpha = 2\beta$ soit $v_2 = \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, le vecteur de base est $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

La solution particulière associée est $Y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

– La matrice fondamentale est $\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{2t} \\ e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

La solution générale est $Y = \varphi(t)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{2t} \\ e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ce^{-t} + 2De^{2t} \\ Ce^{-t} + De^{2t} \end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = Ce^{-t} + 2De^{2t} \\ y(t) = Ce^{-t} + De^{2t} \end{array}\right.$$

On trouve la même solution en utilisant la formule : $\sum\limits_{i=1}^{2} C_i V_i e^{\lambda_i t}$

$$Y = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} \\ C_1e^{-t} + C_2e^{2t} \end{pmatrix}$$

---

2. $\left\{\begin{array}{l} x' = -2x + y \\ y' = -x - 2y \end{array}\right.$

C'est un système homogène

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5$

$\Delta = 16 - 4 \times 5 = -4 = 4j^2$ les racines sont donc complexes conjuguées :

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 2j}{2} = -2 \pm j$

Les vecteurs propres sont aussi complexes conjugués :

$Av_1 = \lambda_1 v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (-2+j)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta - 2\alpha = -(2-j)\,\alpha \\ -\alpha - 2\beta = -(2-j)\,\beta \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = j\alpha \\ -\alpha = +j\beta \end{array}\right.$

soit $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ j\alpha \end{pmatrix}$ donc $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

alors que $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - j\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Remarque

On rappelle le théorème :
Si $\lambda = \alpha + j\omega$ est une valeur propre complexe de la matrice A d'un système différentielle $Y' = AY$, et soit u et v sont respectivement les parties réelle et imaginaire du vecteur propre associé, alors les vecteurs

$$X_1 = (u\cos\omega x - v\sin\omega x)\, e^{\alpha x}$$
$$X_2 = (u\sin\omega x + v\cos\omega x)\, e^{\alpha x}$$

sont deux solutions du système linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.
Par suite la combinaison linéaire des X_1 et X_2 détermine une solution générale du système.
Soit donc

$$Y = \sum_{i=1}^{p} C_i V_i e^{\lambda_i x} + \sum_{i=1}^{q} e^{\alpha_i x} A_i\left(u_i\cos\omega_i x - v_i\sin\omega_i x\right) + B_i\left(u_i\sin\omega_i x + v_i\cos\omega_i x\right))$$

dans notre cas $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha = 1$ et $\omega = 1$

$X_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t \right) e^{-2t} = \begin{pmatrix} (\cos t)\, e^{-2t} \\ -(\sin t)\, e^{-2t} \end{pmatrix}$

$X_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t \right) e^{-2t} = \begin{pmatrix} (\sin t)\, e^{-2t} \\ (\cos t)\, e^{-2t} \end{pmatrix}$

Alors la matrice fondamentale est : $\varphi(t) = \begin{pmatrix} (\cos t)\, e^{-2t} & (\sin t)\, e^{-2t} \\ -(\sin t)\, e^{-2t} & (\cos t)\, e^{-2t} \end{pmatrix}$

et donc la solution générale est :

$$Y = \begin{pmatrix} (\cos t)\, e^{-2t} & (\sin t)\, e^{-2t} \\ -(\sin t)\, e^{-2t} & (\cos t)\, e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\cos t)\, e^{-2t} + B(\sin t)\, e^{-2t} \\ B(\cos t)\, e^{-2t} - A(\sin t)\, e^{-2t} \end{pmatrix}$$

ou bien :

$Y = AX_1 + BX_2$

$= A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t \right) e^{-2t} + B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t \right) e^{-2t}$

$= \begin{pmatrix} A\cos t + B\sin t \\ B\cos t - A\sin t \end{pmatrix} e^{-2t}$

Soit

$$\begin{cases} x(t) = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t) \\ y(t) = e^{-2t}(B\cos t - A\sin t) \end{cases}$$

---

3. $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = -x + 2 \end{cases}$

Ce système n'est pas homogène, mais le second membre est $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ un vecteur constante alors il suffit de fair de chagement des varaibles :

posons $x_1 = x - 2 \Longrightarrow x_1' = x'$ et $y_1 = y + 1 \Longrightarrow y_1' = y'$ et le système devient homogène en x_1 et y_1

$\begin{cases} x_1' = y_1 \\ y_1' = -x_1 \end{cases}$ dont la matrice du système est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$ les racines sont complexes conjugées : $\lambda_{1,2} = \pm j$

Les vecteurs propres sont $v_i = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$; $Av_i = \lambda_i v_i$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = j\alpha \\ -\alpha = j\beta \end{cases}$

soit $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ j\alpha \end{pmatrix}$ donc $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

alors que $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - j \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t \right) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$

$X_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t \right) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

Alors la matrice fondamentale est : $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

et donc la solution générale est :

$$Y_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos t + B\sin t \\ B\cos t - A\sin t \end{pmatrix}$$

Finalement

$$\begin{cases} x = x_1 + 2 = A\cos t + B\sin t + 2 \\ y = y_1 - 1 = B\cos t - A\sin t - 1 \end{cases}$$

4. $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2x + z \\ z' = 2x - y \end{cases} \mapsto A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2+1\right)$$

$P(\lambda) = 0$ a trois reacines : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = j$ et $\lambda_3 = -j$

Cherchons les vecteurs propres :

$\lambda_1 = 1 \to v_1; Av_1 = \lambda_1 v_1 = v_1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a = a \\ c - 2a = b \\ 2a - b = c \end{cases} \Longrightarrow \left[a = \frac{1}{2}c, b = 0\right]$$

Soit $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 2e^t \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = j \to v_2; Av_2 = \lambda_2 v_2 = jv_2$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = j\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = j\alpha \\ \gamma - 2\alpha = j\beta \\ 2\alpha - \beta = j\gamma \end{cases} \Longrightarrow [\alpha = 0, \gamma = j\beta]$$

alors $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

et $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - j\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

La matrice fondamentale est : $\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 2e^t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

La solution générale est :

$$Y = \varphi(t)\,V = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 2e^t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^t \\ B\cos t + C\sin t \\ 2Ae^t + C\cos t - B\sin t \end{pmatrix}$$

alors :

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^t \\ y(t) &= B\cos t + C\sin t \\ z(t) &= 2Ae^t + C\cos t - B\sin t \end{aligned}$$

5. $\begin{cases} x' = x + y + 2z \\ y' = 2x + y + z \\ z' = y + 3z \end{cases} \mapsto A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1 \mapsto C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 \\ 4-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_2 \mapsto L_2 - L_1}{=} (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_3 \mapsto L_3 - L_1}{=} (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)$$

Les valeurs propres de A sont donc : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 4$

Les vecteurs propres associés sont $v_i / Av_i = \lambda_i v_i$

On trouve :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 1, Y_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^t \\ -2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_3 = 4, Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}e^t & e^{4t} \\ -3 & -2e^t & e^{4t} \\ 1 & e^t & e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}e^t & e^{4t} \\ -3 & -2e^t & e^{4t} \\ 1 & e^t & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 - \frac{1}{2}C_2 e^t + C_3 e^{4t} \\ -3C_1 - 2C_2 e^t + C_3 e^{4t} \\ C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{4t} \end{pmatrix}$$

6. $\begin{cases} x' = 4x - 3y + 9z \\ y' = -3x + 4y - 9z \\ z' = -3x + 3y - 8z \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 \\ -3 & 4 & -9 \\ -3 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & 9 \\ -3 & 4-\lambda & -9 \\ -3 & 3 & -8-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \mapsto C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 9 \\ 1-\lambda & 4-\lambda & -9 \\ 0 & 3 & -8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & 4-\lambda & -9 \\ 0 & 3 & -8-\lambda \end{vmatrix} \underset{L_2 \mapsto L_2 - L_1}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 7-\lambda & -18 \\ 0 & 3 & -8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 7-\lambda & -18 \\ 3 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \lambda - 2\right) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

Donc $\lambda_{1,2} = 1$ est une racine double et $\lambda_3 = -2$ est simple

Les vecteurs propres sont tels que $Av = \lambda v$:

$$v=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\leftrightarrow\lambda=1:$$

$$Av=v\Longrightarrow\begin{cases}4a-3b+9c=a\\-3a+4b-9c=b\\-3a+3b-8c=c\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}3a-3b+9c=0\\-3a+3b-9c=0\\-3a+3b-9c=0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow a-b+3c=0\Longrightarrow[a=b-3c]$$

$$v=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b-3c\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\b\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3c\\0\\c\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left\{V_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},V_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow\lambda=1,$$

$$v_3=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\leftrightarrow\lambda=-2$$

$$Av_3=-2v_3\Longrightarrow\begin{cases}4\alpha-3\beta+9\gamma=-2\alpha\\-3\alpha+4\beta-9\gamma=-2\beta\\-3\alpha+3\beta-8\gamma=-2\gamma\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}6\alpha-3\beta+9\gamma=0\\-3\alpha+6\beta-9\gamma=0\\-3\alpha+3\beta-6\gamma=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow[\alpha=-\gamma,\beta=\gamma]$$

soit $V_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\leftrightarrow\lambda=-2$

La solution est :

$$Y=\begin{pmatrix}x\\y\\x\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{3}C_iV_ie^{\lambda_it}=\left(C_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)e^t+C_3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}e^{-2t}$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned}x(t)&=(C_1-3C_2)e^t-C_3e^{-2t}\\y(t)&=C_1e^t+C_3e^{-2t}\\z(t)&=C_3e^{-2t}+C_2e^t\end{aligned}$$

---

7. $\begin{cases}x'=x+z\\y'=x+y\\z'=x+y+2z\end{cases}$

$$P(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\underset{C_1\longmapsto C_1-C_2}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\-(1-\lambda)&1-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&1-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}\underset{L_2\longmapsto L_2+L_1}{=}(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1-\lambda&2\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left((1-\lambda)(2-\lambda)-2\right)$$

$$=\left(\lambda^2-3\lambda\right)(1-\lambda)=\lambda(\lambda-3)(1-\lambda)$$

Les valeurs propres sont λ telles que $P(\lambda)=0\Longrightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3$

Les vecteurs propres sont v_i tels que $Av_i = \lambda_i v_i$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda = 0$$

$$Av_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases} \Longrightarrow [a = -c, b = -c]$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 0,$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 1 \Longrightarrow Av_2 = v_2$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = \alpha \\ \beta + \gamma = \beta \\ \alpha + \beta + 2\gamma = \gamma \end{cases} \Longrightarrow \gamma = 0 \text{ et } \alpha = -\beta$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 1,$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_3 = 3$$

$$\begin{cases} \alpha' + \gamma' = 3\alpha' \\ \beta' + \gamma' = 3\beta' \\ \alpha' + \beta' + 2\gamma' = 3\gamma' \end{cases} , \Longrightarrow \gamma' = 2\alpha' = 2\beta'$$

$$v_3 = a' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_3 = 3$$

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}C_3 e^{3t} - C_2 e^t - C_1 \\ C_2 e^t - C_1 + \frac{1}{2}C_3 e^{3t} \\ C_1 + C_3 e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= -C_1 - C_2 e^t + \frac{1}{2}C_3 e^{3t} \\ y &= -C_1 + C_2 e^t \frac{1}{2}C_3 e^{3t} \\ z &= C_1 + C_3 e^{3t} \end{aligned}$$

---

8. $$\begin{cases} x' = x + 2y + 3z \\ x' = 2y + 3z \\ z' = 3z \end{cases}$$

A est une matrice triangulaire

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

Les valeurs propres de A sont les les racines de l'équation caractéristique : $|A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$

Les vecteurs propres sont tels que $AV_i = \lambda_i V_i$

On trouve :

$\lambda_1 = 1 \leftrightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 2 \leftrightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = 3 \leftrightarrow V_3 = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$

$= \begin{pmatrix} C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + \dfrac{9}{2} C_3 e^{3t} \\ C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t} \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix}$

D'où :

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + \tfrac{9}{2} C_3 e^{3t} \\ y(t) &= C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t} \\ z(t) &= C_3 e^{3t} \end{aligned}$$

---

9. $\begin{cases} x' = x + y + t \\ y' = 2x + y + 2z + e^{2t} \\ z' = y + z \end{cases}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} t \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$

Ce système n'est pas homogène : $Y' = AY + F$

Pour le système homogène : $Y' = AY$

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1 \mapsto C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -(1-\lambda) & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$\overset{L_3 \mapsto L_3 + L_1}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 4\right)$

$P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1$

ou $(1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow (1-\lambda)^2 = 4 \Longleftrightarrow 1 - \lambda = \pm 2 \Longrightarrow \lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 3$

Les vecteurs propres sont respectivement :

$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow Y_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$

$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} -e^t & e^{-t} & e^{3t} \\ 0 & -2e^{-t} & 2e^{3t} \\ e^t & e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

Le second membre est $F = \begin{pmatrix} t \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = F_1 + F_2$

$i)$ On cherche une solution particulière de $Y' = AY + F_1$, de même forme que F_1,

soit $X_1 = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+f \end{pmatrix}$ donc $X_1' = \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix}$

X_1 vérifi le système : $X_1' = AX_1 + F_1$

$$\begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+d+t+at+ct \\ 2b+d+2f+2et+2at+ct \\ d+f+te+ct \end{pmatrix}$$

Par identification on trouve : $\begin{cases} b+d=a & (1) \\ 1+a+c=0 & (2) \\ 2b+d+2f=c & (3) \\ 2a+c+2e=0 & (4) \\ d+f=e & (5) \\ c+e=0 & (6) \end{cases}$

$(6) \Longrightarrow e = -c$

$(4) \Longrightarrow 2a = c$

$(2) \Longrightarrow 3a = -1 \Longrightarrow a = -\frac{1}{3} \Longrightarrow c = -\frac{2}{3}$ et $e = \frac{2}{3}$

on aura $\begin{cases} b+d=-\frac{1}{3} & (1) \\ 2b+d+2f=-\frac{2}{3} & (3) \\ d+f=\frac{2}{3} & (5) \end{cases}$ $: 2\times(1) \longrightarrow \begin{cases} 2b+2d=-\frac{2}{3} & (1') \\ 2b+d+2f=-\frac{2}{3} & (3) \\ d+f=\frac{2}{3} & (5) \end{cases}$

$(1') - (3) \Longrightarrow d - 2f = 0 \Longleftrightarrow d = 2f$

$(5) \Longrightarrow 3f = \frac{2}{3} \Longrightarrow f = \frac{2}{9}$ par suite $d = \frac{4}{9}$

$(1) \Longrightarrow b = -\frac{1}{3} - d = \frac{-1}{3} - \frac{4}{9} = -\frac{7}{9}$

alors : $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}t - \frac{7}{9} \\ -\frac{2}{3}t + \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3}t + \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3t-7 \\ -6t+4 \\ 6t+2 \end{pmatrix}$

$ii)$ Ensuite, on cherche une solution particulière de $Y' = AY + F_2$

$X_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{2t};\ X_2' = 2\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{2t}$

En substituant dans le système $Y' = AY + F_2$ on trouve :

$$2\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou bien :

$$2\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ 2\alpha+\beta+2\gamma+1 \\ \beta+\gamma \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -\alpha+\beta=0 \\ 2\alpha-\beta+2\gamma=-1 \\ \beta-\gamma=0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=-\frac{1}{3}$$

$X_2 = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

La solution générale du système non-homogène est :$Y = \varphi(t)\, V + X_1 + X_2$

$$Y = \begin{pmatrix} -e^{t} & e^{-t} & e^{3t} \\ 0 & -2e^{-t} & 2e^{3t} \\ e^{t} & e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3t-7 \\ -6t+4 \\ 6t+2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Finalement

$$\begin{aligned} x(t) &= -C_1e^{t}+C_2e^{-t}+C_3e^{3t}-\frac{1}{3}t-\frac{7}{9}-\frac{1}{3}e^{2t} \\ y(t) &= -2C_2e^{-t}+2C_3e^{3t}-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}-\frac{1}{3}e^{2t} \\ z(t) &= C_1e^{t}+C_2e^{-t}+C_3e^{3t}+\frac{2}{3}t+\frac{2}{9}-\frac{1}{3}e^{2t} \end{aligned}$$

10. $\left\{\begin{array}{l} x'=y+z \\ y'=x+z \\ z'=x+y \end{array}\right.$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1\mapsto C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2\longmapsto L_2-L_1}{=} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{L_3\longmapsto L_3-L_1}{=} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$(2-\lambda)(\lambda+1)^2$

$\lambda_1=2$: simple et $\lambda_{2,3}=-1$: double

Les vecteurs propres sont :

$$V_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow Y_1=\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$V_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow Y_2=\begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow Y_3=\begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$Y=\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^{2t}-C_2e^{-t}-C_3e^{-t} \\ y(t) &= C_1e^{2t}+C_2e^{-t} \\ z(t) &= C_1e^{2t}+C_3e^{-t} \end{aligned}$$

Matrice non diagonalisable

Exercice 2

En utilisant le spectre de la matrice, résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = 8x - 4y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{2}x + y \\ y' = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}y \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = -3x + \dfrac{5}{2}y \\ y' = -\dfrac{5}{2}x + 2y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = 3x + 9y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = 2x + y - z \\ z' = -y + z \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = x \\ y' = -4x + y \\ z' = 3x + 6y + 2z \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 2x + y + 6z \\ y' = 2y + 5z \\ z' = 2z \end{cases}$

Solution 2 :

Si λ est une valeur propre d'ordre de multiplicité m, et il existe un seul vecteur propore V_1; $AV_1 = \lambda V_1$, on chechera m solutions : $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ linéairement indépendantes, telles que :

$$Y_m = \sum_{k=1}^{m} V_k \frac{x^{m-k}}{(m-k)!} e^{\lambda x} = \left(V_1 \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + V_2 \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + V_{m-1}x + V_m \right) e^{\lambda x}$$

où on a :

$$(A - \lambda I)\, V_1 = 0$$
$$(A - \lambda I)\, V_m = V_{m-1}$$

1. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$

$\lambda = 2$ est une racine double

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé : $Av_1 = \lambda_1 v_1 = 2v_1$

c.à.d. :$\begin{cases} a - b = 2a \\ a + 3b = 2b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -a - b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = -b$ soit $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

alors on a une solution particulière $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$

Cherchons la solution Y_2 linéairement indépendante avec Y_1 : soit donc $Y_2 = (V_1 t + V_2)\, e^{2t}$, où V_2 est un vecteur à déterminer tel que $(A - \lambda I)\, V_2 = V_1$.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $V_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta = 1 \\ \alpha + \beta = -1 \end{pmatrix}$

Si on prend $\alpha = 0$, on obtient $\beta = -1$ alors $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'où : $Y_2 = (V_1 t + V_2)\, e^{2t} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) e^{2t} = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ -(t+1)\, e^{2t} \end{pmatrix}$

La matrice fondamentale est :

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -(t+1)\, e^{2t} \end{pmatrix}$$

d'où $Y = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -(t+1)e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} \\ -C_1 e^{2t} - C_2 (t+1) e^{2t} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{2t} \\ y(t) = -\left(C_1 + C_2 e^{2t} + C_2 t\right) e^{2t} \end{cases}$$

2. $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, $\lambda = 1$ est une V.P double

$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $Av_1 = \lambda v_1$

$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2a - 4b = 0 \\ a - 2b = 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = 2b$

Soit $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$

Cherchons le vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tel que $Y_2 = (V_1 t + V_2) e^t$, on aura $(A - I) V_2 = V_1$

$\Longrightarrow \begin{matrix} 2\alpha - 4\beta = 2 \\ \alpha - 2\beta = 1 \end{matrix}$ pour $a = 0$ on a $\beta = -\frac{1}{2}$ et donc $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

soit $Y_2 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) e^t = \begin{pmatrix} 2te^t \\ \left(t - \frac{1}{2}\right) e^t \end{pmatrix}$

La matrice fondamentale est

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & 2te^t \\ e^t & \left(t - \frac{1}{2}\right) e^t \end{pmatrix}$$

La solution générale du système est

$Y = \begin{pmatrix} 2e^t & 2te^t \\ e^t & \left(t - \frac{1}{2}\right) e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 e^t + 2tC_2 e^t \\ C_1 e^t + C_2 e^t \left(t - \dfrac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$ soit :

$$\begin{cases} x(t) = 2(C_1 + C_2 t) e^t \\ y(t) = \left(C_1 - \dfrac{1}{2} C_2 + C_2 t\right) e^t \end{cases}$$

3. $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = 8x - 4y \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 8 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$, $\lambda = 0$ est une racine double.

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \backslash Av_1 = \lambda v_1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 0 \\ 8a - 4b = 0 \end{cases} \Longrightarrow b = 2a$, alors $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$, soit $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Une solution particulière du système est $Y_1 = V_1 e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

La deuxième solution est $Y_2 = (V_1 t + V_2) e^{\lambda t} = V_1 t + V_2$ où $V_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est un vecteur à déterminer tel que $(A - \lambda I) V_2 = V_1$

on a $\lambda = 0$ donc $AV_2 = V_1 \Longleftrightarrow \begin{matrix} 4\alpha - 2\beta = 1 \\ 8\alpha - 4\beta = 2 \end{matrix}$, Solution is : $\left[\alpha = \dfrac{1}{2}\beta + \dfrac{1}{4}\right]$

Pour $\alpha = 0 : \beta = -\dfrac{1}{2}$ on a alors $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 2t - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ 2C_1 + C_2 \left(2t - \dfrac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$

Finalement :

$$x(t) = C_1 + C_2 t$$
$$y(t) = 2C_1 - \frac{1}{2} C_2 + 2C_2 t$$

4. $\begin{cases} x' = -6x + 4y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $P(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda + 4)^2$, $\lambda_1 = -4$ est une V.P. double

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé $\lambda_1 = -4$; on a $Av_1 = \lambda_1 v_1 = -4v_1$,

$\begin{cases} 4b - 6a = -4a \\ -a - 2b = -4b \end{cases} \Longrightarrow a = 2b$, soit $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow Y_1 = V_1 e^{-4t} = \begin{pmatrix} 2e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix}$

Cherchons $V_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tel que $Y_2 = (V_1 t + V_2) e^{-4t}$ où $V_1 = (A - \lambda I) V_2 = (A + 4I) V_2$

$\begin{cases} -2\alpha + 4\beta = 2 \\ -\alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \Longrightarrow [\alpha = 2\beta - 1]$, si on choisit $\beta = 1$ on trouve $\alpha = 1$ soit $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc : $Y_2 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) e^{-4t} = \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ t + 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$

$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ t + 1 \end{pmatrix} e^{-4t} = \begin{pmatrix} 2C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-4t}(2t + 1) \\ C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-4t}(t + 1) \end{pmatrix}$

$$x(t) = (2C_1 + C_2 + 2C_2 t) e^{-4t}$$
$$y(t) = (C_1 + C_2 + C_2 t) e^{-4t}$$

5. $\begin{cases} x' = -3x + \dfrac{5}{2} y \\ y' = -\dfrac{5}{2} x + 2y \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} -3 & \dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$, $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + \dfrac{1}{4} = \left(\lambda + \dfrac{1}{2}\right)^2$

$\lambda = -\dfrac{1}{2}$ est racine double, le vecteur propre associé est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2}$

Le deuxième vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est tel que $(A - \lambda I) V_2 = V_1$

$\Longleftrightarrow \left(\begin{pmatrix} -3 & \dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{2}\alpha + \dfrac{5}{2}\beta \\ -\dfrac{5}{2}\alpha + \dfrac{5}{2}\beta \end{pmatrix} = V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ou bien $\begin{cases} -\dfrac{5}{2}\alpha + \dfrac{5}{2}\beta = 1 \\ -\dfrac{5}{2}\alpha + \dfrac{5}{2}\beta = 1 \end{cases}$, Solution is : $\left[\alpha = \beta - \dfrac{2}{5}\right]$, soit $\alpha = 0$ donc $\dfrac{2}{5}$ alors $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$

$Y_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}\right) e^{-t/2} = \begin{pmatrix} t \\ t + \dfrac{2}{5} \end{pmatrix} e^{-t/2}$

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ t + \frac{2}{5} \end{pmatrix} e^{-t/2} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_1 + \frac{2}{5} C_2 + C_2 t \end{pmatrix} e^{-t/2}$$

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-t/2}$$
$$y(t) = \left(C_1 + \frac{2}{5} C_2 + C_2 t \right) e^{-t/2}$$

6. $\begin{cases} x' = 3x + 9y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $P(\lambda) = \lambda^2$

$\lambda = 0$:V.P. double :$V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda I) V_2 = V_1 \Longleftrightarrow AV_2 = V_1 \Longrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 9\beta = -3 \\ -\alpha - 3\beta = 1 \end{cases}$

Soit $\beta = 0$ donc $\alpha = -1$ et $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow Y_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t - 1 \\ t \end{pmatrix}$

$\varphi(t) = \begin{pmatrix} -3 & -3t - 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} -3 & -3t - 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3C_1 - C_2 (3t + 1) \\ C_1 + tC_2 \end{pmatrix}$

$$x(t) = -3C_1 - C_2 - 3C_2 t$$
$$y(t) = C_1 + C_2 t$$

7. $\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = 2x + y - z \\ z' = -y + z \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{L_1 \mapsto L_1 - L_2 - L_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda - 1 & \lambda + 1 & \lambda + 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_2 \mapsto C_2 + C_1}{=} -(\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$\underset{C_3 \mapsto C_3 + C_1}{=} -(\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(\lambda+1)\left((3-\lambda)(1-\lambda) + 1\right) = -(\lambda+1)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$

$\lambda_1 = -1$ est une racine simple, le vecteur propre associé est $V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow Y_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$ est une racine double, un seul vecteur propre : $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

la troisième solution particulière est $Y_3 = (V_2 t + V_3)\, e^{2t}$ avec $(A - 2I)\, V_3 = V_2$

Cherchons alors $V_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$(A - 2I)\, V_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + b + c \\ 2a - b - c \\ -b - c \end{pmatrix}$

$(A - 2I)\, V_3 = V_2 \Longrightarrow \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ 2a - b - c = -1 \\ -b - c = 1 \end{cases} \Longrightarrow [a = -1, b = -c - 1]$

Pour $c = 0$ on a $b = -1$ et $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d'où : $Y_3 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{2t} = \begin{pmatrix} -1 \\ -t - 1 \\ t \end{pmatrix} e^{2t}$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}e^{-t} & 0 & -e^{2t} \\ 2e^{-t} & -e^{2t} & -(t+1)\, e^{2t} \\ e^{-t} & e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}$$

$Y = \varphi(t)\, C = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}e^{-t} & 0 & -e^{2t} \\ 2e^{-t} & -e^{2t} & -(t+1)\, e^{2t} \\ e^{-t} & e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{3}{2} C_1 e^{-t} - C_3 e^{2t} \\ y(t) &= 2C_1 e^{-t} - (C_2 + C_3 + C_3 t)\, e^{2t} \\ z(t) &= C_1 e^{-t} + (C_2 + C_3 t)\, e^{2t} \end{aligned}$$

---

8. $\begin{cases} x' = x \\ y' = -4x + y \\ z' = 3x + 6y + 2z \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ -4 & 1 - \lambda & 0 \\ 3 & 6 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 (2 - \lambda)$

$\lambda_1 = 2$: simple, $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

$\lambda_{2,3} = 1$: double, on un seul vecteur propre $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6}e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$

$Y_3 = (V_2 t + V_3)\, e^{t}$ avec $V_2 = (A - \lambda I)\, V_3 = (A - I)\, V_3$

$(A - I)\, V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4a \\ 3a + 6b + c \end{pmatrix} = V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \left[a=\frac{1}{24}, b=\frac{7}{48}-\frac{1}{6}c\right], \text{pour } c=0 \text{ on a } V_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{24}\\ \frac{7}{48}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$Y_3=\left(\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{6}\\ 1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}\frac{1}{24}\\ \frac{7}{48}\\ 0\end{pmatrix}\right)e^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{24}e^t\\ -e^t\left(\frac{1}{6}t-\frac{7}{48}\right)\\ te^t\end{pmatrix}=\frac{1}{48}\begin{pmatrix}2\\ -(8t-7)\\ 48t\end{pmatrix}e^t$$

$$Y=C_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t}+C_2\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{6}\\ 1\end{pmatrix}e^t+C_3\frac{1}{48}\begin{pmatrix}2\\ -(8t-7)\\ 48t\end{pmatrix}e^t$$

$$\begin{aligned} x(t)&=\frac{1}{24}C_3e^t\\ y(t)&=-\frac{1}{6}C_2e^t-\frac{1}{48}C_3(8t-7)e^t\\ z(t)&=C_1e^{2t}+(C_2+C_3t)e^t\end{aligned}$$

---

9. $\begin{cases} x'=2x+y+6z\\ y'=2y+5z\\ z'=2z\end{cases}, A=\begin{pmatrix}2&1&6\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}$

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&6\\0&2-\lambda&5\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^3,\ \lambda=2 \text{ est une V.P triple}$$

Soit $v_1=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\longleftrightarrow \lambda=2: Av_1=\lambda v_1=2v_1$

$$\Longrightarrow \begin{cases}2a+b+6c=2a\\ 2b+5c=2b\\ 2c=2c\end{cases} \Longrightarrow b=c=0$$

alors un seul vecteur propre $V_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\longrightarrow Y_1=\begin{pmatrix}e^{2t}\\0\\0\end{pmatrix}$

Cherchons deux autres solutions particulières :

★ $Y_2=(V_1t+V_2)e^{2t}$ avec $(A-\lambda I)V_2=V_1$

★ $Y_3=\left(\frac{1}{2}V_1t^2+V_2t+V_3\right)e^{2t}$ avec $(A-\lambda I)V_3=V_2$

On a $A-\lambda I=A-2I=\begin{pmatrix}2&1&6\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&6\\0&0&5\\0&0&0\end{pmatrix}$

Soit $V_2=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}:(A-\lambda I)V_2=V_1\Longrightarrow \begin{cases}b+6c=1\\5c=0\\0=0\end{cases}\Longrightarrow c=0, b=1$ on peut choisir aussi $a=0$, donc $V_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$Y_2=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)e^{2t}=\begin{pmatrix}te^{2t}\\e^{2t}\\0\end{pmatrix}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} : (A - \lambda I) V_3 = V_2 \Longrightarrow \begin{cases} \beta + 6\gamma = 0 \\ 5\gamma = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left[\beta = -\frac{6}{5}, \gamma = \frac{1}{5}\right]$$, et soit aussi

$$\alpha = 0, V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$Y_3 = \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}\right) e^{2t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 e^{2t} \\ \left(t - \frac{6}{5}\right) e^{2t} \\ \frac{1}{5} e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2 e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & \left(t - \frac{6}{5}\right) e^{2t} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$Y = \varphi(t) C = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3$$
$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2 e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & \left(t - \frac{6}{5}\right) e^{2t} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \left(C_1 + C_2 t + \frac{1}{2} C_3 t^2\right) e^{2t}$$
$$y(t) = \left(C_2 - \frac{6}{5} C_3 + C_3 t\right) e^{2t}$$
$$z(t) = \frac{1}{5} C_3 e^{2t}$$

Matrice exponentielle

Exercice 3

On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(3^n - 1) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$
2. Calculer e^{At}
3. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propores de A
4. Déduire la solution du système
$$\frac{dx}{dt} = x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y$$

Solution 3 :

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1+3 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{3^2-1}{2} \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$

   $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{3^3-1}{2} \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

   Si $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(3^n-1) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

   $\Longrightarrow A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(3^n-1) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2}3^n - \frac{1}{2} \\ 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(3^{n+1}-1) \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$

2. $A^n t^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(3^n-1) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} t^n = \begin{pmatrix} t^n & \frac{1}{2}(3t)^n - \frac{t^n}{2} \\ 0 & (3t)^n \end{pmatrix}$

   $\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$

   $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} t^n & \frac{1}{2}(3t)^n - \frac{t^n}{2} \\ 0 & (3t)^n \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} & \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3t)^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3t)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$

3. Les valeurs propres sont les racines de $P(\lambda) = 0$

   $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)$

   $P(\lambda) = 0 \to \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$

   Les vecteurs propres sont tels que $AV_i = \lambda_i V_i$

   On trouve :

   $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 1$ et $V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 3$

4. Sous forme matricielle le système s'écrit : $Y' = AY$ avec $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

   – En utilisant les vecteurs propres, la solution est :

   $Y = BV_1 e^{\lambda_1 t} + CV_2 e^{\lambda_2 t} = B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$ Soit :

   $$\begin{cases} x(t) = Be^t + \frac{1}{2}Ce^{3t} \\ y(t) = Ce^{3t} \end{cases}$$

   – En utilisant la matrice exponentielle la solution est de la forme $Y = e^{At}V_0$:

   $Y = \begin{pmatrix} e^t & \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + \frac{1}{2}C_2(e^{3t} - e^t) \\ C_2 e^{3t} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{C_2}{2}e^{3t} + \left(-\frac{C_2}{2} + C_1\right)e^t \\ C_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{C_2}{2}e^{3t} + \left(-\frac{C_2}{2} + C_1\right)e^t \\ y(t) = C_2 e^{3t} \end{cases}$$

même solution en posant $B = -\frac{C_2}{2} + C_1$ et $C = C_2$

Exercice 4

En utilisant la matrice exponentielle, déterminer la solution du système

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x$$

Solution 4 La forme matricielle du système est $Y' = AY$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

La solution est $Y = e^{At}C$

$\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$

Calculons A^n :

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

$A^3 = AA^2 = -AI = -A, \qquad A^4 = I, \qquad A^5 = A$

Pour $n = 2k\ (paire) : A^0 = I, A^2 = -I, A^4 = I, \cdots \Longrightarrow A^{2k} = (-1)^k I$

Pour $n = 2k+1\ (impaire) : A^1 = A, A^3 = -A, A^5 = A, \cdots \Longrightarrow A^{2k+1} = (-1)^k A$

$$A^n = \begin{cases} (-1)^k I & si \quad n = 2k \\ (-1)^k A & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 + \frac{1}{5!}A^5t^5 + \cdots$

$= I + At - \frac{1}{2!}It^2 - \frac{1}{3!}At^3 + \frac{1}{4!}It^4 + \frac{1}{5!}At^5 + \cdots$

$= I\left(1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \cdots\right) + A\left(t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \cdots\right)$

$= I\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + A\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$

On a :

$t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin t$

et $1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} = \cos t$

Alors :

$e^{At} = I\cos t + A\sin t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\sin t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

$Y = e^{At}C = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

Soit :

$$\begin{cases} x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t \\ y(t) = -C_1\sin t + C_2\cos t \end{cases}$$

Exercice 5

Considérons la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. Calculer e^{At}
3. Déduire la solution du système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}x \end{cases}$$

4. Refaire le même exercice si on a la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution 5 :

1. $A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A$

   $\Longrightarrow A^n = A \ \forall n > 0$

   en effet : $A^{n+1} = A^n \times A = A \times A = A^2 = A$

   La matrice A est dite ***idempotente***

2. $e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 + \frac{1}{5!}A^5t^5 + \cdots$

   $= I + At + \frac{1}{2!}At^2 + \frac{1}{3!}At^3 + \frac{1}{4!}At^4 + \frac{1}{5!}At^5 + \cdots$

   $= I + A\left(t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5 + \cdots\right)$

   $= I + A\left(e^t - 1\right)$

   $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left(e^t - 1\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^t & 1-e^t \\ 1-e^t & 1+e^t \end{pmatrix}$

3. $Y = e^{At}C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^t & 1-e^t \\ 1-e^t & 1+e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\left(\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}\right)-C_2\left(\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}\right) \\ C_2\left(\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}\right)-C_1\left(\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(C_1+C_2)+\frac{1}{2}(C_1-C_2)e^t \\ y(t) = \frac{1}{2}(C_1+C_2)-\frac{1}{2}(C_1-C_2)e^t \end{cases}$$

4. $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -2B$

$B^3 = B^2B = -2B^2 = (-2)^2 B$

$B^4 = (B^2)^2 = (-2B)^2 = (-2)^2 B^2 = (-2)^3 B$

$B^n = (-2)^{n-1} B = -\frac{1}{2}(-2)^n B \ \ \forall n \geq 1$

$\exp(Bt) = I + Bt + \frac{1}{2!}B^2t^2 + \frac{1}{3!}B^3t^3 + \frac{1}{4!}B^4t^4 + \frac{1}{5!}B^5t^5 + \cdots$

$= I + -\frac{1}{2}B(-2t) - \frac{1}{2}B\frac{1}{2!}(-2t)^2 - \frac{1}{2}B\frac{1}{3!}(-2t)^3 - \frac{1}{2}B\frac{1}{4!}(-2t)^4 - \frac{1}{2}B\frac{1}{5!}(-2t)^5 - \cdots$

$= I - \frac{1}{2}B\left((-2t) + \frac{1}{2!}(-2t)^2 + \frac{1}{3!}(-2t)^3 + \frac{1}{4!}(-2t)^4 + \frac{1}{5!}(-2t)^5 + \cdots\right)$

$= I - \frac{1}{2}B\left(e^{-2t}-1\right)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\left(e^{-2t}-1\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{-2t} & 1-e^{-2t} \\ 1-e^{-2t} & 1+e^{-2t} \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$, et les vecteurs propres sont :

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 0$ *et* , $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 1$

La solution est

$$Y = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t = \begin{pmatrix} C_1 - C_2e^t \\ C_1 + C_2e^t \end{pmatrix}$$

Exercice 6

Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et déduire A^n $\forall n \in \mathbb{N}$

2. Déduire la solution exponentielle du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 5z \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y + 10z \\ \dfrac{dz}{dt} = -x - 2y - 5z \end{cases}$$

Solution 6 :

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

la matrice A est dite ***nilpotente*** *d'ordre* 2

2. $e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 + \frac{1}{5!}A^5t^5 + \cdots = I + At$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} t+1 & 2t & 5t \\ 2t & 4t+1 & 10t \\ -t & -2t & 1-5t \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{At}C = \begin{pmatrix} t+1 & 2t & 5t \\ 2t & 4t+1 & 10t \\ -t & -2t & 1-5t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2tC_2 + 5tC_3 + C_1(t+1) \\ C_2(4t+1) + 2tC_1 + 10tC_3 \\ -C_3(5t-1) - tC_1 - 2tC_2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 6 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que : $A^2 = B^2 = \left[\frac{1}{2}(A+B)\right]^2$
2. Déduire A^{-1} et B^{-1}
3. Calculer $\exp(C)$ où $C = A - B$

Solution 7 :

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 6 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 6 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -6 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 10 & -6 & 10 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 10 & -6 & 10 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 10 & -6 & 10 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 16I$$

d'où : $A^2 = B^2 = \left[\frac{1}{2}(A+B)\right]^2$

Attention, on a :

$$AB = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 16 \\ -4 & 8 & -4 \\ -20 & 20 & -16 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} -12 & 16 & -16 \\ 4 & 0 & 4 \\ 20 & -20 & 24 \end{pmatrix}$$

Comme $AB \neq BA$ *alors* $(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$

en fait on a

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &= A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2\end{aligned}$$

2. $A^2 = 4I \Longrightarrow A^2 \times A^{-1} = 4IA^{-1} \Longrightarrow A = 4A^{-1}$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 6 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

de même $B^{-1} = \frac{1}{4}B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -6 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

3. Par définition $\exp(C) = I + C + \frac{C^2}{2!} + \frac{C^3}{3!} + \cdots$

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 6 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -6 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 8 & -8 \\ 2 & -2 & 2 \\ 10 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} -8 & 8 & -8 \\ 2 & -2 & 2 \\ 10 & -10 & 10 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^n = 0 \quad \forall n \geq 2$$

C *est dite* ***nilpotente*** *d'ordre* 2.

$$\exp(C) = I + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 & -8 \\ 2 & -2 & 2 \\ 10 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 8 & -8 \\ 2 & -1 & 2 \\ 10 & -10 & 11 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $M^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\exp Mt$ où t est une variable réelle.
3. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y + s \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - s \\ \dfrac{ds}{dt} = -x + z + s \end{cases}$$

Solution 8 :

1. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^n = O, \forall n > 1$

2. $\exp(Mt) = I + Mt + \frac{1}{2}M^2t^2 + \frac{1}{6}M^3t^3 + \cdots$

   $\exp(Mt) = I + Mt$

   $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 & t & t & 0 \\ -t & 1-t & 0 & t \\ t & t & 1 & -t \\ -t & 0 & t & t+1 \end{pmatrix}$

3. $Y(t) = \exp(Mt)\, V = \begin{pmatrix} 1 & t & t & 0 \\ -t & 1-t & 0 & t \\ t & t & 1 & -t \\ -t & 0 & t & t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} A + Bt + Ct \\ Dt - B(t-1) - At \\ C - Dt + At + Bt \\ D(t+1) - At + Ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + (B+C)t \\ B + (D-A-B)t \\ C + (A+B-tD)t \\ D + (D-A+C)t \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x(t) = A + (B+C)t \\ y(t) = B + (D-A-B)t \\ z(t) = C + (A+B-tD)t \\ s(t) = D + (D-A+C)t \end{cases}$$

Exercice 9

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -9 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I$$

où I est la matrice unité.

1. Montrer que $e^{It} = Ie^t ; \forall t \in \mathbb{R}$
2. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer e^{Bt}, en déduire e^{At}
4. Déduire la solution du système différentiel

$$\begin{cases} x' = 4x + 9y - 9z \\ y' = 2x + y \\ z' = 3x + 3y - 2z \end{cases}$$

Solution 9 :

1. On a :
$$It = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$
It est une matrice diagonale, par suite
$$e^{It} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^t = Ie^t$$

On peut utiliser la définition : $\exp(It) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(It)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I^n (t)^n}{n!}$

comme $I^n = I \ \forall n \in \mathbb{N}$ ***alors*** $\exp(It) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I(t)^n}{n!} = I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t)^n}{n!} = Ie^t$

2. $B = A - I = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -9 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$
$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix}$$
$$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$
B est une matrice nilpotente d'ordre 3, donc $\forall n \geq 3 : B^n = O$
3. $e^{Bt} = I + Bt + \frac{1}{2}B^2t^2 + \frac{1}{3!}B^3t^3 + \cdots$
on a $B^n = O$ pour $n \geq 3$ donc

$$e^{Bt}=I+Bt+\frac{1}{2}B^2t^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&9&-9\\2&0&0\\3&3&-3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\6&18&-18\\6&18&-18\end{pmatrix}t^2$$

$$=\begin{pmatrix}4&9&-9\\3t^2+2&9t^2+1&-9t^2\\3t^2+3&9t^2+3&-9t^2-2\end{pmatrix}$$

$A=B+I\Longrightarrow e^{At}=e^{(B+I)t}$

La matrice I commute avec toutes les matrices carrées donc $e^{(B+I)t}=e^{Bt}e^{It}$

par suite

$$e^{At}=e^{Bt}e^{It}=\left(I+Bt+\frac{1}{2}B^2t^2\right)\left(Ie^t\right)=\left(I+Bt+\frac{1}{2}B^2t^2\right)e^t$$

$$=\begin{pmatrix}4&9&-9\\3t^2+2&9t^2+1&-9t^2\\3t^2+3&9t^2+3&-9t^2-2\end{pmatrix}e^t=\begin{pmatrix}4e^t&9e^t&-9e^t\\(3t^2+2)\,e^t&(9t^2+1)\,e^t&-9t^2e^t\\(3t^2+3)\,e^t&(9t^2+3)\,e^t&-\left(9t^2+2\right)e^t\end{pmatrix}$$

4. La solution du système est $Y(t)=e^{At}C$, e^{At} est la matrice fondamentale

$$Y=\begin{pmatrix}4e^t&9e^t&-9e^t\\(3t^2+2)\,e^t&(9t^2+1)\,e^t&-9t^2e^t\\(3t^2+3)\,e^t&(9t^2+3)\,e^t&-\left(9t^2+2\right)e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}x(t)&=(4C_1+9C_2-9C_3)\,e^t\\y(t)&=\left(2C_1+C_2+(3C_1+9C_2-9C_3)\,t^2\right)e^t\\z(t)&=\left(3C_1+3C_2-2C_3+(3C_1+9C_2-9C_3)\,t^2\right)e^t\end{aligned}$$

Exercices Divers

Exercice 10

On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\3&0&2&0\\0&2&0&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A s'écrit sous la forme :

$$P(\lambda)=\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^2-9\right)$$

2. Calculer les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.
3. Déduire la solution du système différentiel :

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=3x+2z\\[2mm]\dfrac{dz}{dt}=3u+2y\\[2mm]\dfrac{du}{dt}=z\end{cases}$$

Solution 10 :

1. $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0\\ 3 & -\lambda & 2 & 0\\ 0 & 2 & -\lambda & 3\\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$$\underset{C_1\mapsto C_1+C_2-C_3-C_4}{=}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 1-\lambda & -\lambda & 2 & 0\\ -1+\lambda & 2 & -\lambda & 3\\ -1+\lambda & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -\lambda & 2 & 0\\ -1 & 2 & -\lambda & 3\\ -1 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2\mapsto L_2+L_3}{=}(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda & 3\\ -1 & 2 & -\lambda & 3\\ -1 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3\mapsto L_1+L_3}{=}(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda & 3\\ 0 & 3 & -\lambda & 3\\ -1 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_4\mapsto L_1+L_4}{=}(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda & 3\\ 0 & 3 & -\lambda & 3\\ 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 3\\ 3 & -\lambda & 3\\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_1\mapsto C_1-C_2}{=}(1-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda & 3\\ 3+\lambda & -\lambda & 3\\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(3+\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3\\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$=(1-\lambda)(3+\lambda)(-\lambda(2-\lambda)-3)=(1-\lambda)(\lambda+3)(\lambda+1)(\lambda-3)$

2. Les valeurs propres sont telles que $P(\lambda)=0\Longrightarrow\lambda=1,-1,3,-3$
Les vecteurs propres sont V_i tels que $AV_i=\lambda_i V_i$

Soit pour $\lambda_1=1\longrightarrow V_1=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\3&0&2&0\\0&2&0&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow\begin{cases} b=a\\ 3a+2c=b\\ 2b+3d=c\\ c=d\end{cases}\Longrightarrow a=b=-c=-d$ soit $v_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$

de même on trouve :

$v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\leftrightarrow\lambda_2=-1, v_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}\leftrightarrow\lambda_3=3$ et $v_4=\begin{pmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{pmatrix}\leftrightarrow\lambda_4=-3$

3. $Y'=AY$ donc la solution est de la forme : $Y=\sum_{k=1}^{4}C_kV_k\exp(\lambda_k t)$

$$Y=C_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}e^{t}+C_2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}e^{-t}+C_3\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}e^{3t}+C_4\begin{pmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{pmatrix}e^{-3t}$$

$$\begin{aligned} x(t)&=-C_1e^{t}+C_2e^{-t}+C_3e^{3t}-C_4e^{-3t}\\ y(t)&=-C_1e^{t}-C_2e^{-t}+3C_3e^{3t}+3C_4e^{-3t}\\ z(t)&=C_1e^{t}-C_2e^{-t}+3C_3e^{3t}-3C_4e^{-3t}\\ u(t)&=C_1e^{t}+C_2e^{-t}+C_3e^{3t}+C_4e^{-3t}\end{aligned}$$

Exercice 11

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (-x-2y-2z, x+2y+z, -x-y)$$

On pose $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et on désigne par E la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. Calculer $(f \circ f)(x,y,z)$ et $(f \circ f \circ f)(x,y,z)$
2. Déterminer $A = M(f,E)$
3. Déterminer $M(f^{\circ n}, E)$, on distingue les cas où n est pair ou impair
4. Déduire A^n
5. Montrer que A est inversible, et calculer son inverse.
6. Déduire la solution du système linéaire :

$$\begin{cases} -x-2y-2z = 1 \\ x+2y+z = 2 \\ -x-y = 3 \end{cases}$$

7. Déterminer $P(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A, et Vérifier que $P(A) = O$
8. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A
9. Calculer $\exp(At)$
10. Déduire par deux méthodes la solution du système différentiel :

$$\frac{dx}{dt} = -x-2y-2z$$
$$\frac{dy}{dt} = x+2y+z$$
$$\frac{dz}{dt} = -x-y$$

Solution 11 $f(x,y,z) = (-x-2y-2z, x+2y+z, -x-y) = (X,Y,Z)$

1. $(f \circ f)(x,y,z) = f(f(x,y,z))$
   $= f(X,Y,Z) = (-X-2Y-2Z, X+2Y+Z, -X-Y)$

$$\begin{cases} -X-2Y-2Z = -(-x-2y-2z) - 2(x+2y+z) - 2(-x-y) = x \\ X+2Y+Z = (-x-2y-2z) + 2(x+2y+z) + (-x-y) = y \\ -X-Y = -(-x-2y-2z) - (x+2y+z) = z \end{cases}$$

   $\Longrightarrow (f \circ f)(x,y,z) = (x,y,z)$
   par suite :
   $(f \circ f \circ f)(x,y,z) = f((f \circ f)(x,y,z)) = f(x,y,z)$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. D'après la première question : $f^{\circ n}=\begin{cases}\mathbb{I} & si \quad n \text{ est pair}\\ f & si \quad n \text{ est impair}\end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f^{\circ 2k}(x,y,z)=(x,y,z)\\ f^{\circ(2k+1)}(x,y,z)=(-x-2y-2z, x+2y+z, -x-y)\end{cases}$$

4. $A^n=M\left(f^{\circ n},E\right)=\begin{cases} I & si \quad n=2k\\ A & si \quad n=2k+1\end{cases}$

5. $\det(A)=\begin{vmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0 \Longrightarrow A$ est inversible

   Puisque $A^2=I$ alors $A^{-1}=A$

6. Si on pose $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$

   alors le système s'écrit : $AX=B$ donc

$$X=A^{-1}B=AB=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\ 8\\ -3\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}x=-11\\ y=8\\ z=-3\end{cases}$$

7. $P(\lambda)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & -2 & -2\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ -1 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1=-(\lambda+1)(\lambda-1)^2$

$$\underset{C_1\mapsto C_1-C_3}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & -2\\ 0 & 2-\lambda & 1\\ -1+\lambda & -1 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 2-\lambda & 1\\ -1 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}\underset{L_3\mapsto L_3+L_1}{=}(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 2-\lambda & 1\\ 0 & -3 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ -3 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left(-(2-\lambda)(2+\lambda)+3\right)$$

$$=(1-\lambda)\left(\lambda^2-1\right)=-(1-\lambda)^2(\lambda+1)=-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$$

$$P(A)=-A^3+A^2+A-I=-A+I+A-I=O$$

8. $P(\lambda)=-(1-\lambda)^2(\lambda+1)$

   Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2}=1\ (double)$ et $\lambda_3=-1\ (simple)$

$$\lambda_{1,2}=1\rightarrow v_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \qquad \lambda_3=-1\rightarrow v_3=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

9. On peut calculer $\exp(At)$ par deux méthodes :

   (i) $\exp(At)=Q\exp(Dt)Q^{-1}$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\Longrightarrow \exp(Dt)=\begin{pmatrix}e^t & 0 & 0\\ 0 & e^t & 0\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow Q^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\exp(At)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^t&0\\0&0&e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\-1&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2e^{-t}&2e^{-t}-2e^t&2e^{-t}-2e^t\\e^t-e^{-t}&3e^t-e^{-t}&e^t-e^{-t}\\e^{-t}-e^t&e^{-t}-e^t&e^t+e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$(ii)\ \exp(At)=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\frac{A^4t^4}{4!}+\frac{A^5t^5}{5!}+\cdots$$

$$=I+At+I\frac{t^2}{2!}+A\frac{t^3}{3!}+I\frac{t^4}{4!}+A\frac{t^5}{5!}+\cdots$$

$$=I\left(1+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4+\cdots\right)+A\left(t+\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5+\cdots\right)$$

Or :

$$\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}=t+\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5+\frac{1}{7!}t^7+\cdots$$

$$\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}=1+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4+\frac{1}{6!}t^6+\cdots$$

$$\Longrightarrow \exp(At)=I\cosh t+A\sinh t$$

$$=I\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)+A\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left((I+A)e^t+(I-A)e^{-t}\right)$$

$$I+A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\1&2&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\1&3&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$I-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\1&2&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&2\\-1&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\exp(At)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0&-2&-2\\1&3&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix}2&2&2\\-1&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}e^{-t}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2e^{-t}&2e^{-t}-2e^t&2e^{-t}-2e^t\\e^t-e^{-t}&3e^t-e^{-t}&e^t-e^{-t}\\e^{-t}-e^t&e^{-t}-e^t&e^t+e^{-t}\end{pmatrix}$$

10. solution du système :

- $$Y=e^{At}C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2e^{-t}&2e^{-t}-2e^t&2e^{-t}-2e^t\\e^t-e^{-t}&3e^t-e^{-t}&e^t-e^{-t}\\e^{-t}-e^t&e^{-t}-e^t&e^t+e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2(C_2+C_3)e^t+2(C_1+C_2+C_3)e^{-t}\\(C_1+3C_2+C_3)e^t-(C_1+C_2+C_3)e^{-t}\\(-C_1-C_2+C_3)e^t+(C_1+C_2+C_3)e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x(t)=-(C_2+C_3)e^t+(C_1+C_2+C_3)e^{-t}\\ y(t)=\frac{1}{2}(C_1+3C_2+C_3)e^t-\frac{1}{2}(C_1+C_2+C_3)e^{-t}\\ z(t)=\frac{1}{2}(C_3-C_2-C_1)e^t+\frac{1}{2}(C_1+C_2+C_3)e^{-t}\end{cases}$$

– $Y = \sum_{k=1}^{3} C'_k V_k \exp(\lambda_k t) = \left[C'_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C'_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^t + C'_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

$$= \begin{pmatrix} -(C'_1 + C'_2)\, e^t + 2C'_3 e^{-t} \\ C'_1 e^t - C'_3 e^{-t} \\ C'_2 e^t + C'_3 e^{-t} \end{pmatrix}$$

si on pose $C'_1 = \frac{1}{2}(C_1 + 3C_2 + C_3)$ et $C'_2 = \frac{1}{2}(C_3 - C_2 - C_1)$ on retrouve les mêmes constantes précédentes

Exercice 12

On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2, M^3 et en déduire M^n.
2. Calculer les valeurs propres de M et les vecteurs propres associés.
3. Calculer $\exp(Mt)$ où t est une variable réelle.
4. Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x + y \end{cases} \qquad (S)$$

Résoudre le système (S)

(a) En utilisant la matrice exponentielle

(b) En utilisant les vecteurs propres

Solution 12 :

1. $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$

   $M^3 = M^2 M = MM = M^2 = M$

   Alors $M^n = M$

2. Le polynôme caractéristique de M est :

   $P(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 4 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

   $\underset{C_1 \mapsto C_1 + C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1-\lambda & -1-\lambda & 2 \\ -1+\lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{L_2 \mapsto L_2 - L_1}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 \mapsto L_3 + L_1}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(1-\lambda)^2 = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$$

Les valeurs proprs sont telles que $P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$ et $\lambda_{2,3} = 1$

Les vecteurs propres sont V_i tels que $MV_i = \lambda_i V_i$

$$\lambda_1 = 0 \leftrightarrow V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{2,3} = 1 \leftrightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. $\exp(Mt) = I + Mt + \dfrac{M^2t^2}{2!} + \dfrac{M^3t^3}{3!} + \dfrac{M^4t^4}{4!} + \dfrac{M^5t^5}{5!} + \cdots$

$$= I + Mt + \frac{Mt^2}{2!} + \frac{Mt^3}{3!} + \frac{Mt^4}{4!} + \frac{Mt^5}{5!} + \cdots$$

$$= I + M\left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots\right)$$

On a $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^3}{3!} + \dfrac{t^4}{4!} + \dfrac{t^5}{5!} + \cdots$

$$\Longrightarrow t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots = e^t - 1$$

Par suite $\exp(Mt) = I + M\left(e^t - 1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left(e^t - 1\right)$

$$= \begin{pmatrix} 3e^t - 2 & 1 - e^t & e^t - 1 \\ 4e^t - 4 & 2 - e^t & 2e^t - 2 \\ 2 - 2e^t & e^t - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Solution de (S)

(a) En utilisant la matrice exponentielle $Y = e^{MT}C$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t - 2 & 1 - e^t & e^t - 1 \\ 4e^t - 4 & 2 - e^t & 2e^t - 2 \\ 2 - 2e^t & e^t - 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C\left(e^t - 1\right) - B\left(e^t - 1\right) + A\left(3e^t - 2\right) \\ A\left(4e^t - 4\right) - B\left(e^t - 2\right) + C\left(2e^t - 2\right) \\ C + B\left(e^t - 1\right) - A\left(2e^t - 2\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B - 2A - C + (3A - B + C)e^t \\ 2B - 4A - 2C + (4A - B + 2C)e^t \\ 2A - B + C + (-2A + B)e^t \end{pmatrix}$$

(b) En utilisant les vecteurs propres $Y = \sum_{k=1}^{3} C_k V_k \exp(\lambda_k t)$

$$Y = C_1\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)e^t = \begin{pmatrix} (C_2 - C_3)e^t - C_1 \\ 2C_2e^t - 2C_1 \\ C_1 + 2C_3e^t \end{pmatrix}$$

$$x(t) = (C_2 - C_3)e^t - C_1$$
$$y(t) = 2C_2e^t - 2C_1$$
$$z(t) = C_1 + 2C_3e^t$$

Exercice 13

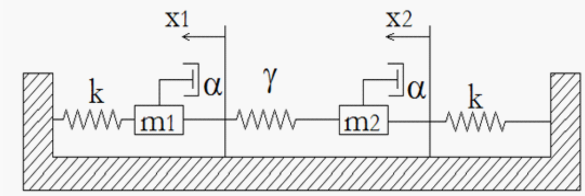
Soit A la matrice carrée suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A s'exprime

$$P(X) = (X+1)^2 \left(X^2 + 2X + 5\right)$$

2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
3. Un dispositif mécanique est composé par un système de Masses-Ressorts-Amortisseurs comme représenté sur la figure ci-dessous.
   Les masses $m_1$et m_2 étant assujetties à se mouvoir horizontalement en vibration libre.



Ce système, dit système à deux degrés de liberté, nécessite la connaissance des deux abscisses indépendantes $x_1(t)$ et $x_2(t)$ vérifiant les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -kx_1 - \gamma(x_1 - x_2) - \alpha x_1' \\ m_2 x_2'' &= -kx_2 - \gamma(x_2 - x_1) - \alpha x_2' \end{aligned} \qquad (S)$$

On donne : $m_1 = m_2 = 1, k = 1$, $\gamma = 2$ et $\alpha = 2$

On pose $x_1 = y_1, x_2 = y_2 \;\; x_1' = y_3$, $x_2' = y_4$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix}$

Montrer que le système (S) s'écrit sous la forme :

$$Y' = AY$$

Utiliser les résultats précédents pour déduire la solution du système
On écrira x_i sous la forme de $x_i = (A_i + B_i t + C_i \cos\omega t + D_i \sin\omega t)\, e^{-t} \;\; (i = 1, 2)$

Solution 13 :

1. $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

$$\underset{L_1 \mapsto L_1 + L_2 + L_3 + L_4}{=} \begin{vmatrix} -\lambda-1 & -\lambda-1 & -\lambda-1 & -\lambda-1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$\underset{C_2 \mapsto C_2 - C_1}{=} -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & -5 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$\underset{C_3 \mapsto C_3 - C_1}{=} -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -5 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$\underset{C_4 \mapsto C_4 - C_1}{=} -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 1-\lambda & 3 \\ 2 & -5 & -2 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(1+\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 5 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & -2 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(1+\lambda)\left(-\lambda(1-\lambda)(-4-\lambda) - 10 + 5(1-\lambda) - 6\lambda\right)$$
$$= (1+\lambda)\left(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 5\right)$$

2. Les valeurs propres sont les racines de $P(\lambda) = 0$
$(1+\lambda)\left(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 5\right) = 0$
$1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1$
Chechons les racines de $Q(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 5 = 0$
Les diviseurs de 5 sont ± 1 et ± 5
$Q(-1) = 0$ donc $\lambda_2 = -1$: $\lambda = -1$ est une racine double
La somme des racines de Q est -3 donc ± 5 ne sont pas des racines
Par division eucludien : $\dfrac{Q(\lambda)}{\lambda+1} = \dfrac{\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 5}{\lambda+1} = \lambda^2 + 2\lambda + 5$
$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 4 = (1+\lambda)^2 + 4$
$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Longrightarrow (\lambda+1)^2 = -4 = 4j^2 \Longrightarrow \lambda_{3,4} = -1 \pm 2j$
Les vecteurs propres sont v_i tels que $Av_i = \lambda_i v_i$
$$\lambda_{1,2} = -1 \leftrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_3 = -1 - 2j \leftrightarrow v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}j \\ -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_4 = -1 + 2j \leftrightarrow v_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{2}{5}j \\ -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. $m_1 = m_2 = 1, k = 1$, $\gamma = 2$ et $\alpha = 2$ donc le système s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} x_1'' = -x_1 - 2\left(x_1 - x_2\right) - 2x_1' \\ x_2'' = -x_2 - 2\left(x_2 - x_1\right) - 2x_2' \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} x_1'' = -3x_1 + 2x_2 - 2x_1' \\ x_2'' = 2x_1 - 3x_2 - 2x_2' \end{array}\right\}$$

$x_1 = y_1, x_2 = y_2$

$x_1' = y_3 \Longrightarrow y_1' = x_1' = y_3$ et $x_1'' = y_3'$, $x_2' = y_4 \Longrightarrow x_2'' = y_4'$et $y_2' = x_2' = y_4$

$x_1'' = -3x_1 + 2x_2 - 2x_1' \Longrightarrow y_3' = -3y_1 + 2y_2 - 2y_3$

$x_2'' = 2x_1 - 3x_2 - 2x_2' \Longrightarrow y_4' = 2y_1 - 3y_2 - 2y_4$

$\Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = -3y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ y_4' = 2y_1 - 3y_2 - 2y_4 \end{array}\right.$$

$$Y = (A + Bt)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C\begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}j \\ -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1-2j)t} + D\begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{2}{5}j \\ -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1+2j)t}$$

$$\begin{array}{l} x_1\left(t\right) = \left(-A - Bt + C_1\cos 2t + D_1\sin 2t\right)e^{-t} \\ x_2\left(t\right) = \left(-A - Bt + C_2\cos 2t + D_2\sin 2t\right)e^{-t} \end{array}$$

En effet pour x_1 : C et D sont deux complexes conjugués

$$C\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j\right)e^{-2jt} + D\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j\right)e^{2jt}$$

$$= \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j\right)C\left(\cos 2t - j\sin 2t\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j\right)D\left(\cos 2t + j\sin 2t\right)$$

$$= \frac{C + D - 2j\left(C - D\right)}{5}\cos 2t - \frac{2\left(C + D\right) + j\left(C - D\right)}{5}\sin 2t = C_1\cos 2t + D_1\sin 2t$$