Bases Scientifiques Mathématiques MVA013

Examen Final 2010-2011 Semestre I

Solutions

Exercice 1 *On considère les deux intégrales:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \qquad et \quad J(x) = \int \frac{x^5+x^3-x+1}{x^4+x^2}dx$$

1. Montrer que $I(x)$ s'exrprime sous la forme $I = \int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x^2}dx$,puis calculer I
2. Montrer que $f(x) = \frac{x^5+x^3-x+1}{x^4+x^2}$ s'exrprime sous la forme $f(x) = \frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+cx+\frac{Ax+B}{x^2+1}$ et calculer J.

Solution 1 (20 points) *$I(x)$ a pour domaine de définition l'intervalle $D =]-1,1[$*

1. $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)-(1-x^2)} = \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2}$$
   $\boxed{\text{2 points}}$

- $J = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

  Posons $x = \sinh t \Longrightarrow \begin{cases} dx = \cosh t dt \\ \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t \end{cases}$ $\boxed{\text{2 points}}$

  $$J = \int \frac{\cosh^2 t}{\sinh^2 t}dt = \int \frac{1+\sinh^2 t}{\sinh^2 t}dt = \int \left(\frac{1}{\sinh^2 t}+1\right)dt$$

  $$= -\coth t + t + c = t - \frac{\cosh t}{\sinh t} + cte \quad \boxed{\text{2 points}}$$

  $$= \arg\sinh x - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + Cte = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + Cte \quad \boxed{\text{1 points}}$$

- $K = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

  $x = \sin u \Longrightarrow \begin{cases} du = \cos u du \\ \sqrt{1-x^2} = \cos u \end{cases}$ $\boxed{\text{2 points}}$

  $$K = \int \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}du = \int \left(\frac{1}{\sin^2 u}-1\right)du = -\cot u + u + m$$

  $$= -\frac{\cos u}{\sin u} - u + cte = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + cte \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$I=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\arg\sinh x+C+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x-cte\right)\quad \boxed{1 \text{ points}}$$

$$-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}$$

$$I=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\arg\sinh x+cte\quad \boxed{2 \text{ points}}$$

2. $J(x)=\int\frac{x^5+x^3-x+1}{x^4+x^2}dx \qquad J$ est définie sur $\mathbb{R}^*$

$$\frac{x^5+x^3-x+1}{x^4+x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+x+\frac{x-1}{x^2+1}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+x+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\quad \boxed{3 \text{ points}}$$

$$J=-\frac{1}{x}-\ln x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\arctan x+C\quad \boxed{3 \text{ points}}$$

Exercice 2 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y'-\frac{2y}{x-1}=2(x-1)$
2. $y''-5y'+4y=x+2e^x$. Donner une solution particulière vérifiant les conditions $y(0)=1$ et $y'(0)=0$

Solution 2 (25 points) *:*

1. $y'-\frac{2y}{x-1}=2(x-1)$

- ESSM : $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x-1}=0\Longleftrightarrow\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x-1}\Longrightarrow\ln|y|=2\ln|x-1|+C$ $\boxed{2 \text{ points}}$

$$y_g=K(x-1)^2\quad \boxed{2 \text{ points}}$$

- EASM : $K=K(x)$: $y'=K'(x-1)^2+2K(x-1)$ $\boxed{2 \text{ points}}$

  $y'-\frac{2y}{x-1}=2(x-1)$

  $\Longrightarrow K'(x-1)^2+2K(x-1)-\frac{2K(x-1)^2}{x-1}=2(x-1)$

  $\Longrightarrow K'=\frac{2}{x-1}\Longrightarrow K=2\ln|x-1|$ $\boxed{2 \text{ points}}$

$$y_p=(x-1)^2\ln(x-1)^2$$

  $y(x)=y_g+y_p$:

$$y(x)=(x-1)^2\left(K+\ln(x-1)^2\right)\quad \boxed{2 \text{ points}}$$

2. $y'' - 5y' + 4y = x + 2e^x$

- ESSM : $y'' - 5y' + 4y = 0$
  Equation caratéristique : $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, les racines sont : $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$y_g = C_1 e^{4x} + C_2 e^x \qquad \boxed{\text{3 points}}$$

- EASM :
  $\lambda = 1$ est une racine simple, le second membre est $x + 2e^x$ on cherchera une solution particulière sous la forme : $y_p = ax + b + cxe^x$

$$\begin{cases} y_p' = a + ce^x + cxe^x = a + (cx + c)\, e^x \\ y_p'' = (cx + c)\, e^x + ce^x = (cx + 2c)\, e^x \end{cases}$$

$y'' - 5y' + 4y = x + 2e^x$

$\Longrightarrow (cx + 2c)\, e^x - 5a - 5\,(cx + c)\, e^x + 4\,(ax + b) + 4cxe^x = x + 2e^x$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\Longrightarrow 4b - 5a + 4ax - 3ce^x = x + 2e^x$

$$\begin{cases} -3c = 2 \\ 4a = 1 \\ 4b - 5a = 0 \end{cases} \Longrightarrow c = -\frac{2}{3} \qquad a = \frac{1}{4} \qquad b = \frac{5}{16} \quad \boxed{\text{3 points}}$$

$$y_p = \frac{x}{4} + \frac{5}{16} - \frac{2x}{3} e^x$$

$y\,(x) = y_g + y_p$

$$y\,(x) = C_1 e^{4x} + \left(C_2 - \frac{2x}{3} \right) e^x + \frac{x}{4} + \frac{5}{16} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$y\,(0) = C_1 + C_2 + \frac{5}{16} = 1 \Longrightarrow C_1 + C_2 = \frac{11}{16}$$

$$y'\,(0) = \left(4C_1 e^{4x} + \left(-\frac{2}{3} + C_2 - \frac{2x}{3} \right) e^x + \frac{1}{4} \right)_{x=0} = 4C_1 - \frac{2}{3} + C_2 + \frac{1}{4} = 4C_1 + C_2 - \frac{5}{12} = 0$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{11}{16} \\ 4C_1 + C_2 = \frac{5}{12} \end{cases} \Longrightarrow \left[C_1 = -\frac{13}{144}, C_2 = \frac{7}{9} \right] \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$y_P\,(x) = -\frac{13}{144} e^{4x} + \left(\frac{7}{9} - \frac{2x}{3} \right) e^x + \frac{x}{4} + \frac{5}{16} \quad \boxed{\text{1 points}}$$

Exercice 3 *En utilisant le développement en série de Taylor calculer :* $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$

Solution 3 (5 points) *:*

- $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O\left(x^4\right)$

$$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \frac{x - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots \right)}{x \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \cdots \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x}{\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + 1} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Ou bien :

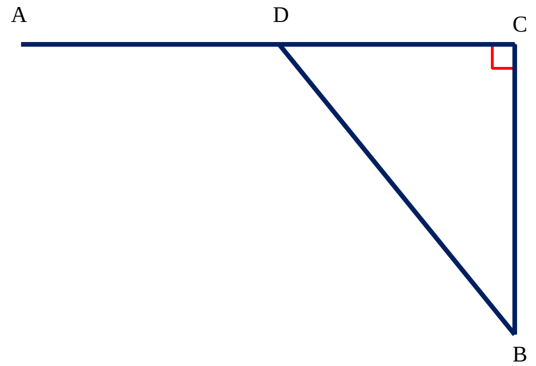
- $\dfrac{1}{\ln(1+x)} = \dfrac{1}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3} = \dfrac{6}{2x^3 - 3x^2 + 6x}$

$$\frac{6}{2x^3 - 3x^2 + 6x} - \frac{1}{x} = \frac{3 - 2x}{2x^2 - 3x + 6} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Exercice 4 *Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ. On connait les distances $AC = \ell$ et $CB = d$. Si v est la vitesse du tracteur dans le champ alors que sur la route sa vitesse est $2v$.*

Il quitte la route en un point D de $[AC]$ tel que $DC = x$ avec $0 \leq x \leq \ell$. Les trajets successifs de A à D et de D à B sont supposés rectilignes.

Déterminez le point D pour que le temps total de A à B soit minimal. Discutez suivant ℓ et d.



Solution 4 (15 points) *$DC = x$ avec $0 \leq x \leq \ell$.*

On a : $AD = \ell - x$ et $DB = \sqrt{x^2 + d^2}$

Si $V_C = v$ désigne la vitesse du tracteur dans le champ, sa vitesse sur la route est $V_R = 2v$; et le temps total mis par le tracteur pour atteindre B est :

$$t = \frac{AD}{V_R} + \frac{DB}{V_C} = \frac{\ell - x}{2v} + \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{v} \quad \boxed{\text{4 points}}$$

On cherche l'abscisse x_0 du minimum de la fonction t sur $[0, \ell]$.

On a : $\dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{1}{2v} + \dfrac{x}{v\sqrt{x^2 + d^2}}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$-\dfrac{1}{2v} + \dfrac{x}{v\sqrt{x^2 + d^2}} = 0 \Longrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 4x^2 = x^2 + d^2 \Longrightarrow x_0 = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\dfrac{dt}{dx} \geq 0 \Longleftrightarrow 2x \geq \sqrt{x^2 + d^2}$ $\boxed{\text{1 points}}$

- si $d \geq \sqrt{3}\ell \Longrightarrow \dfrac{dt}{dx} \leq 0$ sur $[0, \ell]$. La fonction $t(x)$ est strictement décroissante sur $[0, \ell]$ et atteint son minimum en $x_0 = \ell$, c'est-à-dire que le tracteur quitte la route en A. $\boxed{\text{2 points}}$

- si $0 \leq d \leq \sqrt{3}\ell$ alors $\dfrac{dt}{dx} < 0$ pour $0 < x < \dfrac{d}{\sqrt{3}\ell}$ et $\dfrac{dt}{dx} > 0$ pour $\dfrac{d}{\sqrt{3}\ell} < x < \ell$ $\boxed{\text{2 points}}$

  La fonction t passe donc par un minimum en $x_0 = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$. $\boxed{\text{2 points}}$

Exercice 5 *Soit la fonction suivante :*

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

1. Montrer que $f(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x)$ est-elle dérivable au point $x = 0$?
3. Calculer les limites de $f(x)$ quant x tend respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$
4. Montrer que $f(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et qu'elle admet une fonction réciproque. Préciser l'expression de sa fonction réciproque.

Solution 5 (10 points) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & si \quad x > 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & si \quad x < 0 \end{cases}$ alors $\forall x : 1 + |x| \neq 0$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Par conséquent, f est partout définie sur $\mathbb{R}$ et est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

   $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$ et $f(0) = 0$ $\boxed{\text{1 point}}$

   La fonction f est également continue au point 0. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \qquad f'(0) = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{1-x} = -1$ $\boxed{\text{1 point}}$

4. $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & si \quad x > 0 \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} & si \quad x < 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $\Longrightarrow f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R} \Longrightarrow f(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{1 point}}$

   $x > 0 \longrightarrow y = \dfrac{x}{1+x} \Longrightarrow x = \dfrac{y}{1-y}$ avec $y \in [0, 1[$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $x < 0 \longrightarrow y = \dfrac{x}{1-x} \Longrightarrow x = \dfrac{y}{1+y}$ avec $y \in]-1, 0]$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

Exercice 6 *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. En déduire la solution du système suivant

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = -2 \\ z - y = -1 \end{cases}$$

Solution 6 (10 points) *:*

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $A^3 - 3A^2 + 3A - I$

   $= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0 \Longrightarrow A^2 - 3A + 3I = A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Exercice 7 *On considère la fonction* $f(x,t) = \sin n\pi x \cos nc\pi t$ *où* n *et* c *sont deux constantes données. Montrer que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Solution 7 (5 points) $f(x,t) = \sin n\pi x \cos nc\pi t$

$\frac{\partial f}{\partial t} = -nc\pi \sin n\pi x \sin nc\pi t$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -n^2c^2\pi^2 \sin n\pi x \cos nc\pi t = -n^2c^2\pi^2 f$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = n\pi \cos n\pi x \cos nc\pi t$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -n^2\pi^2 \sin n\pi x \cos nc\pi t = -n^2\pi^2 f = \frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\ \boxed{1 \text{ point}}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

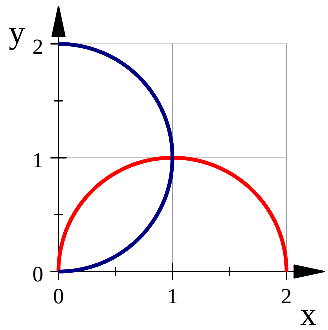
Exercice 8 *Soient les domaines :*

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\right\} \\ D_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + (y-1)^2 \leq 1, x \geq 0\right\} \end{aligned}$$

On désigne par D le domaine intersection de D_1et D_2.

1. Calculer à l'aide des intégrales doubles les aires de D_1et D_2
2. Déduire l'aire de D.

Solution 8 (10 points) *:*



1. $A_1 = \iint\limits_{D_1} dxdy = \iint\limits_{\Delta 1} rdrd\theta = \int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^{2\cos\theta} rdr\right)d\theta = \frac{1}{2}\pi$ $\boxed{4 \text{ points}}$

   $A_1 = \iint\limits_{D_2} dxdy = \iint\limits_{\Delta 2} rdrd\theta = \int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^{2\sin\theta} rdr\right)d\theta = \frac{1}{2}\pi$ $\boxed{4 \text{ points}}$

2. $A = \iint\limits_{D} dxdy = \int\limits_0^{\pi/4}\left(\int\limits_0^{2\sin\theta} rdr\right)d\theta + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\int\limits_0^{2\cos\theta} rdr\right)d\theta = \frac{1}{2}\pi - 1$ $\boxed{2 \text{ points}}$