Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

Bases Scientifiques mathématiques - MVA013

Examen Final 2012-2013 Jeudi 19/2/2013 **Durée : 3: 00 h**

Documents, téléphones, calculatrice programmable : strictement interdits

Sujet coordonné par : Dr. Noureddine ASSAAD

Proposé pour les centres de: Beyrouth, Bickfaya

Exercice 1 (20 points) *On considère les matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = A + I$$

où I est la matrice unité d'ordre 3.

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$.
2. Calculer B et exprimer en fonction A et I : B^2 et B^3
3. Montrer que A et B commutent entre eux.
4. Calculer le polynôme $P_A(x)$ caractéristique de A et déduire $P_B(\lambda)$ celui de B. En déduire que B est inversible.
5. Vérifier que $P_B(B) = O$, et déduire la matrice inverse de B.
6. Résoudre alors le système linéaire:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Solution 1 *:*

1. $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = -3A$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $A^3 = A^2 A = (-3A)A = -3A^2 = (-3)^2 A$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Soit

   $$A^n = (-3)^{n-1} A \quad \boxed{\text{1 point}}$$

   Si $A^n = (-3)^{n-1} A$ alors $A^{n+1} = A^n A = (-3)^{n-1} A^2 = (-3)^n A$

2. $B = A + I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $B^2 = (A+I)^2 = A^2 + 2A + I^2 = -3A + 2A + I = I - A$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $B^3 = B^2 B = (I - A)(I + A) = I^2 - A^2 = I + 3A$ $\boxed{\text{1 point}}$

3. $AB = A(A+I) = A^2 + A = -3A + A = -2A$
   $BA = (A+I)A = A^2 + A = -2A = AB$ $\boxed{\text{1 point}}$

4. $P_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} -2-x & 1 & 1 \\ 1 & -2-x & 1 \\ 1 & 1 & -2-x \end{vmatrix} = -x^3 - 6x^2 - 9x$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $P_B(\lambda) = |B - \lambda I| = |A + I - \lambda I| = |A - (\lambda - 1)I| = P_A(\lambda - 1)$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $= -(\lambda-1)^3 - 6(\lambda-1)^2 - 9(\lambda-1) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $\Longrightarrow \det(B) = P_B(0) = 4 \neq 0$ donc B est inversible. $\boxed{\text{1 point}}$

5. $P_B(B) = -B^3 - 3B^2 + 4I = -(I + 3A) - 3(-A + I) + 4I = O$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $P_B(B) \times B^{-1} = -B^2 - 3B + 4B^{-1} = O$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $\Longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{4}\left(B^2 + 3B\right) = \frac{1}{4}(I - A + 3A + 3I) = \frac{1}{2}(A + 2I)$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

6. La matrice du système est B, elle est inversible donc la solution du système est :
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \boxed{\text{1 point}}$$
   $x = 2 \qquad y = \frac{3}{2} \qquad z = \frac{3}{2}.$ $\boxed{\text{2 points}}$

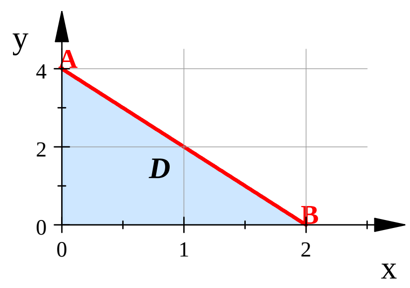
Exercice 2 (15 points) *On considère une plaque métallique D en forme d'un triangle de sommets $O(0,0)$, $A(2,0)$ et $B(0,4)$.*

La plaque est chargée avec une densité de charge $\lambda(x,y) = (x-y)^2$ et sa densité surfacique de masse est $\sigma(x,y) = xy$

1. Calculer la charge totale de D.
2. Calculer le volume de la zone limitée par D,les plans $x = 0, y = 0$ et la portion du plan d'équation $2x + y + z = 4$.
3. Calculer les moments d'inertie de D par rapport à l'axe ox, l'axe oy , et par rapport à l'origine.

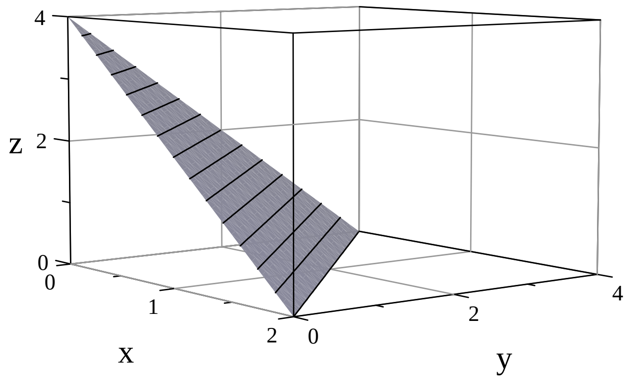
Solution 2 *:* **D** *est le domaine limité par les axes Ox et Oy et la droite (AB) d'équation* $y = -2x + 4$

Dans le domaine (D) : $0 \leq x \leq 2$ *et* $0 \leq y \leq -2x + 4$



$(x > 0, y < -2x + 4)$

1. La charge d'un élément de surface est $dQ = \lambda dxdy$ donc la charge totale est :
   $Q = \iint\limits_D \lambda(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D (x-y)^2\,dxdy$
   $= \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{-2x+4} \left(x^2+y^2+2xy\right) dy \right) dx$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $= \int\limits_0^2 \left(x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right)_0^{-2x+4} dx$
   $= \int\limits_0^2 \left(-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 16x + \frac{64}{3} \right) dx = \frac{56}{3}$ C $\boxed{\text{2 points}}$



2.

$$V = \iint\limits_D z\,dxdy = \iint\limits_D (4-2x-y)\,dxdy \ \boxed{\text{2 points}}$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{-2x+4} (4-2x-y)\,dy \right) dx = \frac{16}{3} \boxed{\text{2 points}}$$

3. Le moment d'inertie par rapport à un axe Δ d'un élément de masse dm est $dI_\Delta = \rho^2 dm = \rho^2 \sigma dxdy$
   Alors $I_\Delta = \iint\limits_D \rho^2 \sigma dxdy = \iint\limits_D \rho^2 xy dxdy$ $\boxed{\text{2 points}}$

   - Par rapport à l'axe Ox : $\rho = y$
     $I_x = \iint\limits_D \left(y^2\right)(xy)\,dxdy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{-2x+4} xy^3 dy \right) dx = \frac{128}{15}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   - Par rapport à l'axe Oy : $\rho = x$
     $I_y = \iint\limits_D \left(x^2\right)(xy)\,dxdy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{-2x+4} x^3 y dy \right) dx = \frac{32}{15}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   - Par rapport à l'origine O : $\rho = r$
     $I_O = \iint\limits_D \left(r^2\right)(xy)\,dxdy = I_x + I_y = \frac{128}{15} + \frac{32}{15} = \frac{32}{3}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Exercice 3 (15 points) *Soit:* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$

1. Montrer que $\forall n \geq 2 : I_n + I_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}$

2. Calculer I_0 et I_1.Déduire I_3 et I_4.

Solution 3 *:*

1. $I_n + I_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-2}}{x^2+1}dx$ $\boxed{\text{2 points}}$
$= \int_0^1 \frac{\left(x^2+1\right)x^{n-2}}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^{n-2}dx = \left.\frac{x^{n-1}}{n-1}\right|_0^1 = \frac{1}{n-1}$ $\boxed{\text{2 points}}$
$n \geq 2 \Longrightarrow x^{n-1} \underset{x\to 0}{\to} 0$ donc:
$$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$$

2. $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{2 points}}$
$I_1 = \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$ $\boxed{\text{2 points}}$
$I_3 + I_1 = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} \Longrightarrow I_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx = \frac{1-\ln 2}{2}$ $\boxed{\text{2 points}}$
$I_2 + I_0 = \frac{1}{2-1} = 1 \Longrightarrow I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{2 points}}$
$I_4 + I_2 = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$
$\Longrightarrow I_4 = \int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}dx = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 4 (15 points) *On considère la forme différentielle:*

$$\omega = (xdx + ydy + zdz)\, e^{-x^2-y^2-z^2}$$

1. Montrer que ω est une différentielle totale.
2. Soit $f(x,y,z)$, la fonction telle que $\omega = df$. Déterminer f sachant que $f(0,0,0) = 0$.

Solution 4 *: Soit* $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$

1. $P = xe^{-x^2-y^2-z^2}, Q = ye^{-x^2-y^2-z^2}, R = ze^{-x^2-y^2-z^2}$
$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = -2xye^{-x^2-y^2-z^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -2xye^{-x^2-y^2-z^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \boxed{\text{2 points}}$$
$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial z} = -2xze^{-x^2-y^2-z^2} \\ \frac{\partial R}{\partial x} = -2xze^{-x^2-y^2-z^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad \boxed{\text{2 points}}$$
$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial z} = -2yze^{-x^2-y^2-z^2} \\ \frac{\partial R}{\partial y} = -2yze^{-x^2-y^2-z^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \quad \boxed{\text{2 points}}$$
Alors ω est une différentielle totale. c.à.d. $\exists f = f(x,y,z) / \omega = df$. $\boxed{\text{1 point}}$

2. $\omega = df \Longrightarrow P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

$\Longrightarrow f = \int xe^{-x^2-y^2-z^2}dx = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2-y^2-z^2} + g(y,z)$ $\boxed{\text{3 points}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = ye^{-x^2-y^2-z^2} + \dfrac{\partial g}{\partial y} = Q = ye^{-x^2-y^2-z^2} \Longrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow g = g(z)$ $\boxed{\text{1 point}}$

$f(x,y,z) = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2-y^2-z^2} + g(z)$

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = ze^{-x^2-y^2-z^2} + \dfrac{dg}{dz} = R = ze^{-x^2-y^2-z^2}$

$\Longrightarrow \dfrac{dg}{dz} = 0 \Longrightarrow g = C = Cte$ $\boxed{\text{1 point}}$

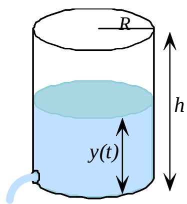
$f(x,y,z) = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2-y^2-z^2} + C$ $\boxed{\text{1 point}}$

$f(0,0,0) = -\dfrac{1}{2} + C = 0 \Longrightarrow C = \dfrac{1}{2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

finalement :

$$f(x,y,z) = -\frac{1}{2}e^{-x^2-y^2-z^2} + \frac{1}{2} \boxed{\text{1 point}}$$

Exercice 5 (15 points) *On considère un récipient cylindrique de hauteur h et de rayon de base R contenant un liquide non visqueux, le récipient est percé en bas par un petit trou circulaire rayon r.*



Suivant la loi de Torricelli l'écoulement du liquide est régi par l'équation différentielle:

$$\frac{dV}{dt} + kA\sqrt{y} = 0 \qquad (E_1)$$

Où à l'instant t :$V = V(t)$ est le volume de l'eau dans le récipient , $y = y(t)$ est sa hauteur, A est la section du trou et k une constante positive. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le récipient était plein $(y(0) = h)$.

1. Montrer que l'équation (E_1) devient une équation à variables séparables sous la forme:

$$\frac{dy}{dt} = -k\alpha^2\sqrt{y} \qquad (E_2)$$

où $\alpha = \dfrac{r}{R}$.

2. En intégrant l'équation (E_2) ,dèterminer la hauteur instantanée du liquide $y(t)$.

3. A quelle instant le récipient devient vide?

Applications numériques:
$h = 100\,\text{cm} \qquad R = 30\,\text{cm} \qquad r = 1\,\text{cm} \qquad k = 40\,\text{cm}^{1/2}.\text{s}^{-1}$

Solution 5 *:*

1. Le volume du liquide,à l'instant t, dans le récipient est : $V(t) = \pi R^2 y,$ $\boxed{\text{1 point}}$ R est le rayon du base du récipient, c'est une constant, donc $\frac{dV}{dt} = \pi R^2 \frac{dy}{dt}$ $\boxed{\text{1 point}}$
   L'équation (E_1) s'écrit : $\frac{dV}{dt} = -kA\sqrt{y}$, or A est la section du trou : $A = \pi r^2$ donc on a:
   $\pi R^2 \frac{dy}{dt} = -k\pi r^2 \sqrt{y}$ $\boxed{\text{1 point}}$ou bien:
   $$\frac{dy}{dt} = -k\frac{r^2}{R^2}\sqrt{y} = -k\alpha^2\sqrt{y} \; \boxed{\text{2 points}}$$

2. L'équation (E_2) est une équation différentielle du premier order à variables séparables, alors:
   $\frac{dy}{\sqrt{y}} = -k\alpha^2 dt$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $\int y^{-1/2} dy = -k\alpha^2 \int dt$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $\Longrightarrow 2\sqrt{y} = -k\alpha^2 t + C$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $\Longrightarrow y(t) = \frac{1}{4}\left(C - k\alpha^2 t\right)^2$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $y(0) = h \Longrightarrow C = 2\sqrt{h}$ $\boxed{\text{1 point}}$d'où:
   $$y(t) = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{h} - k\alpha^2 t\right)^2 \; \boxed{\text{2 points}}$$

3. Le récipient devient vide à l'instant t_1 tel que $y(t_1) = 0$,c'est-à-dire pour: $2\sqrt{h} - k\alpha^2 t_1 = 0$ donc
   $$t_1 = \frac{2\sqrt{h}}{k\alpha^2} = \frac{2R^2\sqrt{h}}{kr^2} \; \boxed{\text{2 points}}$$

App.Num.: $h = 100\,\text{cm}$ $R = 30\,\text{cm}$ $r = 1\,\text{cm}$ $k = 40\,\text{cm}^{1/2}.\text{s}^{-1}$
$t_1 = \frac{2R^2\sqrt{h}}{kr^2} = \frac{2 \times 900 \times \sqrt{100}}{40 \times 1} = 450\,\text{s}$
$t_1 = \frac{450}{60} = \frac{15}{2} = 7.5\,\text{min.}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Exercice 6 (20 points) *On considère l'équation différentielle :*

$$y'' - 2ay' + y = 2a\sin x \qquad (E)$$

Où a est un réel tel que $a \in\,]-1, 0[\, \cup\,]0, 1[$. On pose $\omega = \sqrt{1 - a^2}$.

1. Déterminer $y_1(x)$ la solution générale de l'équation sans second membre associée à (E).
2. Déterminer $y_2(x)$ une solution particulière de (E). Déduire $y(x)$ la solution générale de (E).
3. Déterminer $y_p(x)$ la solution de (E)telle que $y_p(0) = 0$ et $y_p'(0) = 0$.
4. Soit $u(x)$ la fonction solution de l'équation différentielle $u'' - 2u' + u = 2\sin x$ avec $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$.
   Comparer $u(x)$ et $\lim_{a \to 1} y_p(x)$.

Solution 6 *:*

1. L'équation homogène associée à (E) est : $y'' - 2ay' + y = 0$
   Son équation caractéristique est : $\lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $\Delta' = a^2 - 1 = -\omega^2 < 0$
   les racines sont $\lambda_{1,2} = a \pm j\omega \Longrightarrow$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $$y_1(x) = e^{ax}(A\cos\omega x + B\sin\omega x) \quad \boxed{\text{2 points}}$$

2. La solution particulière de l'équation complète est de la forme: $y_2 = \alpha\cos x + \beta\sin x$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $y_2' = -\alpha\sin x + \beta\cos x \qquad y_2'' = -\alpha\cos x - \beta\sin x$
   $y'' - 2ay' + y = 2a\sin x$
   $\Longrightarrow -\alpha\cos x - \beta\sin x - 2a(-\alpha\sin x + \beta\cos x) + \alpha\cos x + \beta\sin x = 2a\sin x$
   $\Longrightarrow 2a\alpha\sin x - 2a\beta\cos x = 2a\sin x$
   Par identification on trouve : $\beta = 0$ et $\alpha = 1 \Longrightarrow$
   $$y_2(x) = \cos x \quad \boxed{\text{2 points}}$$
   Finalement:
   $$y(x) = e^{ax}(A\cos\omega x + B\sin\omega x) + \cos x \quad \boxed{\text{1 point}}$$

3. $y(0) = A + 1 = 0 \Longrightarrow A = -1$ $\boxed{\text{1 point}}$ $\Longrightarrow y(x) = e^{ax}(-\cos\omega x + B\sin\omega x) + \cos x$
   $y'(x) = ae^{ax}(-\cos\omega x + B\sin\omega x) + e^{ax}(\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x) - \sin x$
   $y'(0) = -a + B\omega = 0 \Longrightarrow B = \dfrac{a}{\omega}$ $\boxed{\text{1 point}}$ alors:
   $$y_p(x) = e^{ax}\left(-\cos\omega x + \frac{a}{\omega}\sin\omega x\right) + \cos x \quad \boxed{\text{1 point}}$$

4. Dans le cas $u'' - 2u' + u = 2\sin x$:
   L'équation caractéristique de l'ESSM : est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$ a une racine double: $r = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$
   La solution générale de (E) est donc : $u(x) = e^x(mx + n) + \cos x$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $u(0) = n + 1 = 0 \Longrightarrow n = -1$
   $u'(x) = e^x(mx + n + m) - \sin x$
   $u'(0) = n + m = 0 \Longrightarrow m = -n = 1$
   $$u(x) = e^x(x-1) + \cos x \quad \boxed{\text{2 points}}$$
   Si $a \to 1 \Longrightarrow \omega = \sqrt{1-a^2} \to 0$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $\cos\omega x \to 1 \qquad e^{ax} \to e^x$
   $\lim\limits_{a\to1} \dfrac{a}{\omega}\sin\omega x = \lim\limits_{a\to1} ax\dfrac{\sin\omega x}{\omega x} = x$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $\lim\limits_{a\to1} y_p(x) = \lim\limits_{a\to1} e^{ax}\left(-\cos\omega x + \dfrac{a}{\omega}\sin\omega x\right) + \cos x = e^x(-1+x) + \cos x = u(x)$ $\boxed{\text{2 points}}$