Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Bases Scientifiques mathématiques - MVA013

Examen Final 2013-2014 - Semestre I

Solutions

Exercice 1 (25 points) : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 8 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, A^3 et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. La matrice A est-elle inversible ? Justifier. Calculer A^{-1} si elle existe.
3. Déduire la solution du système linéaire :

$$\begin{cases} 5x - 2y + 2z = -2 \\ 8x - 3y + 4z = -4 \\ 2y - 4x - z = 2 \end{cases}$$

Solution 1

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 8 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 8 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ 5 points

   $A^3 = A^2A = IA = A$ 2 points

   On démontre que $A^n = \begin{cases} I & si \quad n = 2k \\ A & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$ 5 points

2. $\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 8 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc A est inversible 4 points

   On a $A^2 = I \Longrightarrow A^{-1} \times A^2 = A^{-1} \times I \Longrightarrow A^{-1} = A$ 3 points

3. Le système s'écrit : $AX = M$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

   La solution est

   $X = A^{-1}M = AM$

   $= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 8 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ 3 points

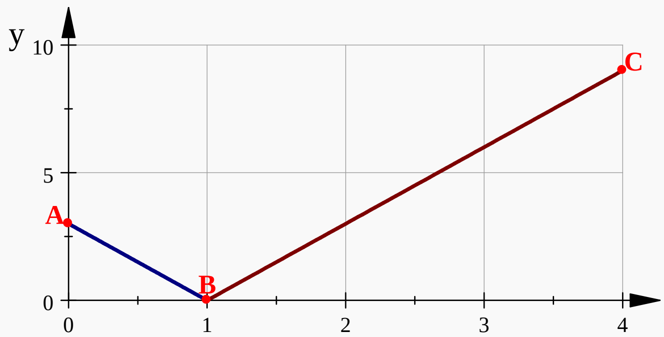
   $[x = 2, y = 4, z = -2]$ 3 points

Exercice 2 (20 points) : Dans le plan (xOy) on considère les segments des droites $[AB]$ et $[BC]$ tels que $A(0,3), B(1,0), C(4,9)$

1. Représenter graphiquement les points A, B, C et les segments $[AB]$ et $[BC]$.
2. Déterminer les équations des droites (AB) et (BC)
3. Calculer le volume du solide (S) obtenu par rotation autour de l'axe Ox de la zone limitée par l'axe ox et les segments $[AB]$ et $[BC]$.
4. Tracer une figure montrant le solide (S).

Solution 2

1. Figure $\boxed{\text{2 points}}$



2. L'équation de la droite (AB) : $y = -3(x-1)$. $\boxed{\text{3 points}}$

   L'équation de la droite (BC) : $y = 3(x-1)$. $\boxed{\text{3 points}}$

3. La rotation de la courbe $y = f(x)$ autour de l'axe Ox détermine un volume de révolution. Chaque point $M(x,y)$ de la courbe décrit, dans une section plane, un cercle centré sur l'axe Ox et de rayon $R = y = f(x)$, l'aire du cercle est $S = \pi y^2$, le volume du cylindre élémentaire de hauteur dx est $dV = \pi y^2 dx$, par suite le volume du corps de révolution est : $V_X = \pi \int_a^b y^2 dx$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Le volume de révolution de la zone limité par AB et l'axe Ox est :

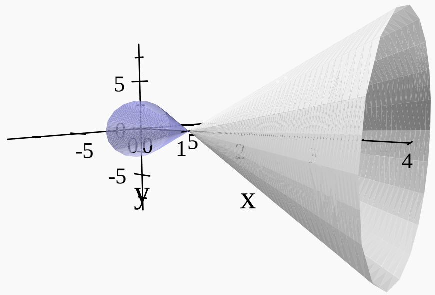
$$V_1 = \pi \int_0^1 9(x-1)^2 dx = 3\pi \quad \boxed{\text{4 points}}$$

   Le volume de révolution de la zone limité par BC et l'axe Ox est :

$$V_2 = \pi \int_1^4 9(x-1)^2 dx = 81\pi \quad \boxed{\text{4 points}}$$

   Le volume total est $V = V_1 + V_2 = 3\pi + 81\pi = 84\pi$ $\boxed{\text{1 point}}$

4. Figure $\boxed{\text{2 points}}$



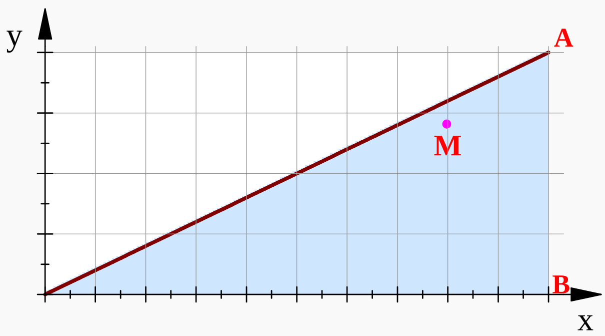
Exercice 3 (15 points) On désigne par (D) le triangle du plan (xOy) de sommets $O\,(0,0)\,,A\,(a,2a)$ et $B\,(a,0)$

Soit $\sigma = cte$, la densite de masse de (D)

1. Calculer I le moment d'inertie de (D) en rotation par rapport à l'axe oy
2. Exprimer I en fonction de la masse m de D

Solution 3

l'équation de la droite (OA) est $y = 2x$ $\boxed{\text{2 points}}$



1. Le moment d'inertie d'un élément de masse $dm = \sigma dxdy$ est
   $dI = \lambda^2 dm = \lambda^2 \sigma dxdy,$ $\boxed{\text{2 points}}$
   la distance λ d'un point $M \in D$ à l'axe oy est $\lambda = x$ alors $dI = \sigma x^2 dxdy$
   En fixant x : y varie de $y_m = 0$ à $y_M = 2x$ sur la droite (OA) et sur $D : 0 \leq x \leq a$
   $$I = \iint_D \sigma x^2 dxdy = \sigma \int_0^a \left(\int_0^{2x} x^2 dy \right) dx = \sigma \int_0^a \left(2x^3\right) dx = \frac{1}{2}\sigma a^4 \quad \boxed{\text{6 points}}$$
2. La masse de D est
   $$m = \iint_D \sigma dxdy = \sigma \int_0^a \left(\int_0^{2x} dy \right) dx = \sigma \int_0^a (2x)\, dx = \sigma a^2 \quad \boxed{\text{3 points}}$$
   donc
   $$I = \frac{1}{2} m a^2 \quad \boxed{\text{2 points}}$$

Exercice 4 (10 points) : 1 mole de gaz parfait qui occupe le volume V à la température T et à la pression P vérifie la relation $PV = \mathcal{R}T$ où $\mathcal{R}$ est la constante molaire. Montrer que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1 \text{ et } T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = \mathcal{R}$$

Solution 4

$P = \frac{\mathcal{R}T}{V} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{\mathcal{R}T}{V^2}$ $\boxed{\text{1 point}}$ et $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\mathcal{R}}{V}$ $\boxed{\text{1 point}}$

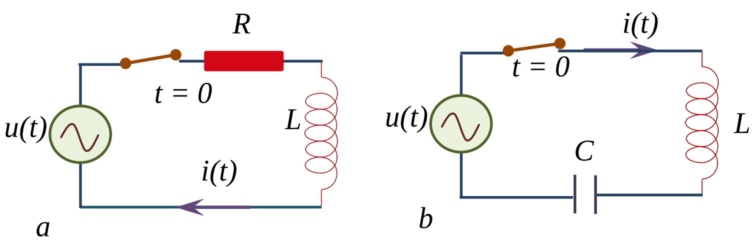
$V = \frac{\mathcal{R}T}{P} \Longrightarrow \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\mathcal{R}}{P}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$T = \frac{PV}{\mathcal{R}} \Longrightarrow \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{\mathcal{R}}$ $\boxed{\text{1 point}}$

▲ $\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = \left(-\frac{\mathcal{R}T}{V^2}\right)\left(\frac{\mathcal{R}}{P}\right)\left(\frac{V}{\mathcal{R}}\right) = -\frac{\mathcal{R}T}{PV} = -1$ $\boxed{\text{3 points}}$

▲ $T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = T\left(\frac{\mathcal{R}}{V}\right)\left(\frac{\mathcal{R}}{P}\right) = \frac{\mathcal{R}^2 T}{PV} = \mathcal{R}$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 5 (30 points) :



1. Un circuit (R, L), contenant un conducteur ohmique de résistance constante R, (exprimée en Ω), en série avec une bobine d'inductance pure de L millihenrys (mH), et un générateur de tension variable $u(t)$ exprimée en volt (V) (Fig. a)Le courant électrique $i(t)$ est en fonction du temps, exprimée en ampères (A) et défini par l'équation différentielle
$$L\frac{di}{dt} + Ri = u(t)$$
Déterminer $i(t)$ si $R = 6\,\Omega, L = 3\,\text{mH}, u(t) = 2t$ V. et $i(0) = 0\,\text{A}$.
2. On considère maintenant le circuit (L, C), (Fig. b) un condensateur de capacité C (exprimée en mF) en série avec la bobine (L), soumis, à l'instant $t = 0$, à la tension $u(t) = u_0 \cos\omega t$
Le courant électrique est alors défini en fonction du temps par l'équation différentielle :
$$L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = u(t)$$
On donne : $L = 4\,\text{mH}, C = 1\,\text{mF}$, $u(t) = 5\cos 5t$.. Déterminer l'expression de $i(t)$ en prenant comme conditions initiales $i(0) = 0\,\text{A}$ et $\frac{di}{dt}(0) = 0$.

Solution 5

1. l'équation différentielle du circuit (a) est

$$3\frac{di}{dt}+6i=2t \tag{E_1}$$

c'est une équation linéaire du premier ordre.

– l'équation sans second membre est alors $3\frac{di}{dt}+6i=0$ ou bien

$$\frac{di}{dt}+2i=0 \quad \boxed{\text{1 point}} \tag{E_2}$$

En séparant les variables, on écrit

$$\frac{di}{i}=-2dt \quad \boxed{\text{1 point}}$$

L'intégration de deux membres nous donne

$$i_1(t)=Ke^{-2t} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

– solution particulière de l'équation complète : on suppose que $K=K(t)$ $\boxed{\text{1 point}}$

Alors $\frac{di}{dt}=(K'-2K)\,e^{-2t}$ $\boxed{\text{1 point}}$
Substituons dans l'équation E_1 :
$3(K'-2K)\,e^{-2t}+6Ke^{-2t}=2t \iff K'=\frac{2}{3}te^{-2t}$ $\boxed{\text{1 point}}$
En intégrant par parties on trouve
$K=\frac{2}{3}\int te^{2t}dt=\frac{1}{6}e^{2t}(2t-1)$ $\boxed{\text{2 points}}$
Soit $i_2(t)=\frac{1}{6}e^{2t}(2t-1)\,e^{-2t}=\frac{1}{6}(2t-1)$ et finalement

$$i(t)=Ke^{-2t}+\frac{1}{6}(2t-1) \quad \boxed{\text{1 point}}$$

Pour $t=0 : i(0)=K-\frac{1}{6}=0 \Longrightarrow K=\frac{1}{6}$ $\boxed{\text{1 point}}$ soit

$$i(t)=\frac{1}{6}\left(e^{-2t}+2t-1\right) \quad \boxed{\text{1 point}}$$

2. l'équation différentielle du circuit (b) s'écrit

$$4\frac{d^2i}{dt^2}+i=5\cos 5t \tag{F_1}$$

L'équation sans second membre est :

$$4\frac{d^2i}{dt^2}+i=0 \quad \boxed{\text{1 point}} \tag{F_2}$$

son équation caractéristique est $r^2+\frac{1}{4}=0.$ $\boxed{\text{1 point}}$

les racines sont $r_{1,2}=\pm\frac{1}{2}j$ $\boxed{\text{1 point}}$

La solution générale de (F_2) est

$$i_1(t) = A\cos\left(\frac{t}{2}\right) + B\sin\left(\frac{t}{2}\right) \quad \boxed{\text{2 points}}$$

on a $\omega = 5 \neq \pm\frac{1}{2}j$ alors on cherchera une solution particulière de (F_1) sous la forme $i_2 = a\cos 5t + b\sin 5t$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\frac{di_2}{dt} = -5a\sin 5t + b5\cos 5t$ $\boxed{\text{1 point}}$ et $\frac{d^2 i_2}{dt^2} = -25a\cos 5t - 25b\sin 5t$ $\boxed{\text{1 point}}$

Substituons dans (F_1) :

$-25a\cos 5t - 25b\sin 5t + 9a\cos 5t + 9b\sin 5t = 5\cos 5t$ $\boxed{\text{1 point}}$

On obtient : $\begin{cases} -16a = 5 \\ 16b = 0 \end{cases} \Longrightarrow b = 0$ $\boxed{\text{1 point}}$ et $a = -\frac{5}{16}$ $\boxed{\text{1 point}}$

donc $i_2 = -\frac{5}{16}\cos 5t$ $\boxed{\text{1 point}}$ et finalement :

$$i(t) = A\cos\frac{1}{2}t + B\sin\frac{1}{2}t - \frac{5}{16}\cos 5t \quad \boxed{\text{2 points}}$$

On a : $i(0) = A - \frac{5}{16} = 0 \Longrightarrow A = \frac{5}{16}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}t + \frac{25}{16}\sin 5t$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\frac{di}{dt}(0) = 0 \Longrightarrow B = 0$ $\boxed{\text{1 point}}$ la solution particulière est donc

$$i(t) = \frac{5}{16}\left(\cos\frac{1}{2}t - \cos 5t\right) \quad \boxed{\text{2 points}}$$