Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

# Bases Scientifiques Mathématiques (MVA013)

*Examen Final 2014-2015-Semestre I* **Durée : 2h :00**

## Solution

**Exercice 1 (30 points)** : On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 2y = 10e^x \qquad (E)$$

1. Déterminer $y_g(x)$ la solution générale de l'équation sans second membre associée à $(E)$.
2. Déterminer $y_p(x)$ une solution particulière de $(E)$.
3. Déduire $y(x)$ la solution générale de $(E)$.
4. Déterminer $y_1(x)$ la solution de $(E)$ telle que $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 0$.

*Solution 1*

1. L'équation homogène associée à $(E)$ est : $y'' + 2y' + 2y = 0$
   Son équation caractéristique est : $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 = -4 < 0$ $\boxed{\text{2 points}}$
   les racines de l'équation caractéristique sont donc complexes
   Soit $j = \sqrt{-1} \iff j^2 = -1$, par suite $\Delta = -4 = 4j^2$
   les racines sont $\lambda_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2j}{2} = -1 \pm j$ $\boxed{\text{3 points}}$
   Soit :
   $$y_g(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) \quad \boxed{\text{3 points}}$$
2. La solution particulière à chercher est de la forme : $y_p = Ce^x$,donc $y_p' = Ce^x$ et $y_p'' = Ce^x$ $\boxed{\text{3 points}}$
   $y'' + 2y' + 2y = 8e^x \Longrightarrow$
   $C + 2C + 2C = 10 \Longrightarrow C = 2$ $\boxed{\text{2 points}}$
   d'où : $y_p = 2e^x$ $\boxed{\text{2 points}}$
3. La solution générale de $(E)$ est $y(x) = y_g + y_p$ soit :
   $$y(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + 2e^x \boxed{\text{3 points}}$$
4. Pour $x = 0$ : $y(0) = A + 2 = 0 \Longrightarrow A = -2$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $y'(x) = -e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + e^{-x}(-A\sin x + B\cos x) + 2e^x$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $y'(0) = -A + B + 2 = 0 \Longrightarrow B = A - 2 = -4$ $\boxed{\text{3 points}}$
   Soit donc
   $$y_1(x) = -2e^{-x}(\cos x + 2\sin x) + 2e^x \quad \boxed{\text{3 points}}$$

**Exercice 2 (20 points)** On considère une tige $(T)$ ,homogène de densité de masse linéaire $\lambda$, placée dans le plan $(xOy)$ et elle assimilée au segment de droite $y = x + 1$ dans l'intervalle $[0, 2]$
On désigne par $(D)$ la région du plan $(xOy)$ limité par $(T)$, l'axe $(Ox)$ et les droites $x = 0$ et $x = 2$ En utilisant l'intégrale simple, Calculer :

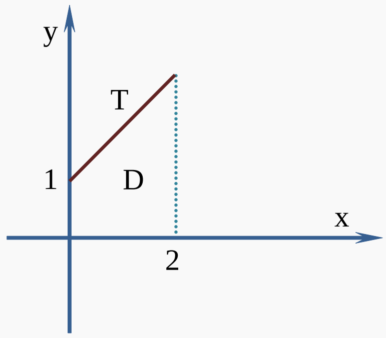
1. La masse $m$ de tige en fonction de $\lambda$
2. L'aire de la zone $(D)$
3. Le volume du solide obtenu par rotation de $D$ autour de l'axe $Ox$

**Solution 2**

1. Soit $d\ell$ un élément de longueur de la tige : $d\ell = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dx^2+dx^2} = \sqrt{2}dx$ $\boxed{\text{2 points}}$

   La masse de l'élément $d\ell$ est $dm = \lambda d\ell = \lambda\sqrt{2}dx$ donc $m = \lambda\sqrt{2}\int_0^2 dx = 2\sqrt{2}\lambda$ $\boxed{\text{3 points}}$

2. L'aire de la zone $(D)$ est $A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x+1)\,dx = 4$ $\boxed{\text{5 points}}$



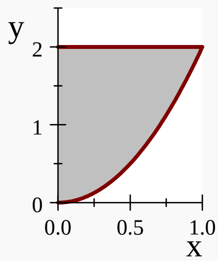

3. Volume de révolution généré par rotation de la zone $(D)$autour de $Ox$ :

   $$V_x = \pi\int_0^2 y^2dx = \pi\int_0^2 (x+1)^2\,dx = \pi\left.\frac{(x+1)^3}{3}\right|_0^2 = \frac{26}{3}\pi \ \boxed{\text{10 points}}$$

**Exercice 3 (20 points)** On considère une plaque homogène de densité de masse $\lambda$, sous forme du domaine $D$ limité par la branche parabolique $y = 2x^2$, l'axe $y'Oy$ et la droite $y = 2$ avec $x \geq 0$

1. Calculer le volume du solide de base $D$ de couvert $z = x + 2y$
2. Calculer le moment d'inertie de $(D)$ en sa rotation autour de $Oy$.

**Solution 3**




1. $V = \iint_D z\,dxdy = \int_0^1\left(\int_{2x^2}^2 (x+2y)\,dy\right)dx$ $\boxed{\text{5 points}}$

   $$= \int_0^1 (xy+y^2)_{2x^2}^2\,dx = \int_0^1 (-4x^4-2x^3+2x+4)\,dx = \frac{37}{10}\boxed{\text{5 points}}$$

2. $I_\Delta = \iint_D \rho^2\lambda dxdy$ où $\lambda$ est la densité de masse et $\rho$ la distance d'un point $M \in D$ à l'axe $\Delta$.

   en sa rotation autour de $Oy$ : $\rho = x$

   $$I_y = \lambda\iint_D x^2dxdy = \lambda\int_0^1\left(\int_{2x^2}^2 x^2dy\right)dx \ \boxed{\text{5 points}}$$

   $$= \lambda\int_0^1 x^2\left(2-2x^2\right)dx = 2\lambda\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)_0^1 = 2\lambda\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{4\lambda}{15} \ \boxed{\text{5 points}}$$

**Exercice 4 (30 points)** On considère le champ vectoriel :

$$\overrightarrow{H} = \left(x^{\alpha} + 2x^3y^2 + xy^4\right)\overrightarrow{i} + \left(x^4y + 2x^2y^3 + y^{\beta}\right)\overrightarrow{j}$$

1. Calculer : div $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$
2. Pour quelles valeurs de $\alpha$ et $\beta$, le champ $\overrightarrow{H}$ est conservatif ?
3. Soit $\alpha = \beta = 5$. Exprimer $\overrightarrow{H}$ à l'aide du rayon vecteur $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et $r = \|\overrightarrow{r}\|$.
4. Déterminer, dans les conditions 3) le champ scalair $\varphi = \varphi(x, y)$ tel que $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$.

*Solution 4*

1. $\text{div}\,\overrightarrow{H} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \alpha x^{\alpha-1} + 6x^2y^2 + y^4 + x^4 + 6x^2y^2 + \beta y^{\beta-1}$

   $= \alpha x^{\alpha-1} + \beta y^{\beta-1} + 12x^2y^2 + x^4 + y^4$ $\boxed{\text{5 points}}$

   $$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^{\alpha} + 2x^3y^2 + xy^4 & x^4y + 2x^2y^3 + y^{\beta} & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{0} \; \boxed{\text{5 points}}$$

2. $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{H}$ est conservatif $\forall \alpha$ et $\beta$ $\boxed{\text{5 points}}$

3. $\overrightarrow{H} = (x^5 + 2x^3y^2 + xy^4)\overrightarrow{i} + (x^4y + 2x^2y^3 + y^5)\overrightarrow{j}$

   $= x\,(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\overrightarrow{i} + y\,(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\overrightarrow{j}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}\right) = (x^2 + y^2)^2\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}\right) = r^4\overrightarrow{r}$ $\boxed{\text{5 points}}$

4. $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi \Longrightarrow d\varphi = \overrightarrow{\nabla}\varphi \cdot \overrightarrow{dr} = \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = r^4\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{dr} = r^5 dr$ $\boxed{\text{5 points}}$

   $\varphi = \displaystyle\int d\varphi = \int r^5 dr = \frac{1}{6}r^6 + C = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^3 + C$ $\boxed{\text{3 points}}$