Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

# Bases Scientifiques Mathématiques (MVA013)

*Examen Final 2015-2016* **Durée : 2h :00**

# SOLUTIONS

**Exercice 1 (10 points)** **Vrai ou Faux, justifier.**
**Chaque réponse correcte rapport 2 points, Chaque réponse incorrecte ou non justifiée enlève 1 point.**

1. $\int_a^b f(x)\,dx$ représente la longueur de la courbe $y = f(x)$ pour $x \in [a, b]$
2. Si $f = f(x, y, z)$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$
3. $\iint_D dxdy$ représente l'aire du domaine $(D)$
4. L'équation différentielle $y' = -2x$ admet pour solutions les fonctions $f(x) = ke^{-2x}$
5. Si $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif alors $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$

*Solution 1*

1. FAUX $\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire de la zone limité par la courbe $y = f(x)$, l'axe $ox$ et les droites $x = a$ et $x = b$. 2 points
2. FAUX Si ces dérivées partielles sont continues on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 2 points
3. VRAI : $dxdy = dA$ est un élément de surface, donc $A = \iint_D dxdy$ 2 points
4. FAUX Les solutions sont $f(x) = -x^2 + k$ 2 points
5. VRAI Si $\overrightarrow{H}$ est un conservatif alors $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\varphi$, donc $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla}\varphi = \overrightarrow{0}$. 2 points

**Exercice 2 (20 points)** On demande de résoudre l'équation différentielle :

$$(x+1)\,y' + y = (x+1)\,e^x \qquad \textbf{(E)}$$

par deux méthodes différentes :

1. Première méthode
   (a) Déterminer la solution générale de l'équation homogène.
   (b) Par variation de la constante trouver une solution particulière de $(E)$.
   (c) Déduire la solution générale de $(E)$.
2. Deuxième méthode
   En introduisant la variable $z = (x+1)\,y$, Déterminer la solution générale de $(E)$
3. Donner la solution particulière $y_1(x)$ telle que $y_1(0) = 0$

## Solution 2

L'équation différentielle a un sens si $x \neq -1$

1. **Première méthode**

   (a) l'équation homogène : $(x+1)\,y' + y = 0 \Longleftrightarrow (x+1)\,\dfrac{dy}{dx} = -y$

   En séparant les variables : $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x+1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   Intégrant les deux membres, on obtient : $\ln|y| = -\ln|x+1| + C = \ln\left|\dfrac{K}{x+1}\right|$

   soit $y_g = \dfrac{K}{x+1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   (b) On propose la solution particulière : $y_p = \dfrac{K_1(x)}{x+1}$,

   alors $y'_p = \dfrac{K'_1(x+1) - K_1}{(x+1)^2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $(x+1)\,y' + y = (x+1)\,e^x$

   $\Longrightarrow \dfrac{K'_1(x+1) - K_1}{(x+1)} + \dfrac{K_1}{x+1} = (x+1)\,e^x$ soit $K'_1 = (x+1)\,e^x$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $K_1 = \displaystyle\int (x+1)\,e^x dx = xe^x$ $\boxed{\text{2 points}}$

   d'où $y_p = \dfrac{xe^x}{x+1}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   (c) La solution générale de $(E)$ est $y(x) = y_g + y_p = \dfrac{K + xe^x}{x+1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. **Deuxième méthode**

   Soit $z = (x+1)\,y \Longrightarrow z' = (x+1)\,y' + y$ $\boxed{\text{2 points}}$

   donc l'équation devient : $z' = (x+1)\,e^x$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Soit alors $z = \displaystyle\int (x+1)\,e^x dx = xe^x + C$ $\boxed{\text{1 point}}$

   d'où $y = \dfrac{z}{x+1} = \dfrac{C + xe^x}{x+1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

3. $y(0) = C = 0$ soit $y_1(x) = \dfrac{xe^x}{x+1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

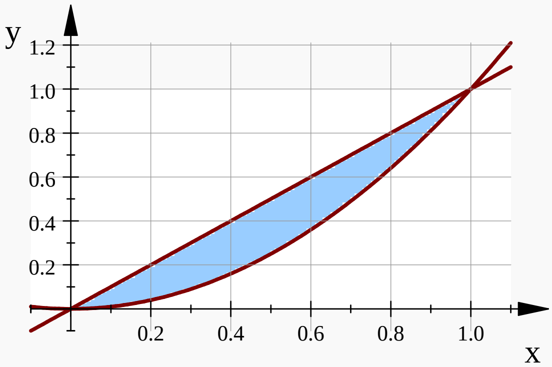
**Exercice 3 (15 points)** Soit $(D)$ la région du plan $(xOy)$ limité par la courbe $y = x^2$ et la droite $y = x$. Calculer l'aire de la région $(D)$

1. A l'aide d'une intégrale simple.
2. A l'aide d'une intégrale double.

## Solution 3

1. A l'aide d'une intégrale simple : $S = \displaystyle\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{6}$ $\boxed{\text{5 points}}$

2. A l'aide d'une intégrale double : $S = \displaystyle\iint_D dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} dy\right) dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{6}$ $\boxed{\text{10 points}}$




$$D = \left\{(x,y) \,/ y \geq x^2, y \leq x\right\}$$

**Exercice 4 (20 points)** Soit l'équation différentielle.

$$y'' - 2y' + \left(1+\pi^2\right) y = \pi^2 e^x \qquad \textbf{(F)}$$

1. Trouver la solution générale de l'équation sans second membre.
2. Chercher une solution particulière de $(F)$
3. En déduire la solution générale de $(F)$

*Solution 4*

1. $ESSM : y'' - 2y' + \left(1+\pi^2\right) y = 0$
   l'équation caractéristique est : $\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \pi^2 = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $\Delta = 4 - 4\left(1+\pi^2\right) = -4\pi^2 = 4j^2\pi^2$, donc les racines sont $\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 2j\pi}{2} = 1 \pm j\pi$ $\boxed{\text{2 points}}$
   La solution générale de l'ESSM est
   $$y_g = e^x \left(A\cos \pi x + B \sin \pi x\right) \boxed{\text{3 points}} \qquad (1)$$
2. On cherchera une solution particulière de la forme $y_p = \alpha e^x$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $y'_p = \alpha e^x$ et $y''_p = \alpha e^x$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $y'' - 2y' + \left(1+\pi^2\right) y = \pi^2 e^x$
   $\Longrightarrow \alpha e^x - 2\alpha e^x + \left(1+\pi^2\right) \alpha e^x = \pi^2 e^x$ $\boxed{\text{3 points}}$
   En identifiants les coefficients de $e^x$ on trouve :$\alpha = 1 \Longrightarrow y_p = e^x$ $\boxed{\text{3 points}}$
3. La solution générale de $(F)$ est
   $$y = y_g + y_p = y_g = e^x \left(A\cos \pi x + B \sin \pi x + 1\right) \boxed{\text{3 points}}$$

**Exercice 5 (15 points)** :

1. Calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$. Déduire la valuer de $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{7 - 5\sin x - \cos^2 x}$

2. En intégrant par parties calculer : $K = \int \frac{xdx}{\cos^2 x}$

**Solution 5**

1. On a $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$ $\boxed{\text{3 points}}$

   donc $I = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2} = \ln|x-3| - \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{7-5\sin x - \cos^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{6-5\sin x-\sin^2 x}$$

   Soit $t = \sin x$ donc $dt = \cos xdx$ $\boxed{\text{2 points}}$

   pour $x = 0 : t = 0$, et si $x = \frac{\pi}{2} : t = 1$

   alors $J = \int_0^1 \frac{dt}{6-5t+t^2} = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{4}{3}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. On sait que $\frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$

   donc on pose $\begin{cases} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dv & \Longrightarrow & v = \tan x \end{cases}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $K = x\tan x - \int \tan xdx = x\tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $= x\tan x - \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = x\tan x + \ln|\cos x| + C$ $\boxed{\text{2 points}}$

**Exercice 6 (20 points)** On considère le champ vectoriel

$$\overrightarrow{H} = 2(1+xyz)\left(yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}\right)$$

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$
2. Montrer que $\omega = 2(1+xyz)(yzdx + xzdy + xydz)$ est une différentielle totale.
3. Déterminer la fonction $f(x,y,z)$ telle que $\omega = df$

**Solution 6**

Soit $\overrightarrow{H} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$

1. $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$

$$\left\{\begin{array}{lll} R = 2(1+xyz)xy & \Longrightarrow & \frac{\partial R}{\partial y} = 2(xz)xy + 2(1+xyz)x = 4yzx^2 + 2x \\ Q = 2(1+xyz)xz & \Longrightarrow & \frac{\partial Q}{\partial z} = 2(xy)xz + 2(1+xyz)x = 4yzx^2 + 2x \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \ \boxed{\text{2 points}}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} P = 2(1+xyz)yz & \Longrightarrow & \frac{\partial P}{\partial z} = 2(xz)xy + 2(1+xyz)x = 4yzx^2 + 2x \\ R = 2(1+xyz)xy & \Longrightarrow & \frac{\partial R}{\partial x} = 2(yz)xy + 2(1+xyz)y = 4yzx^2 + 2x \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \ \boxed{\text{2 points}}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} P = 2(1+xyz)yz & \Longrightarrow & \frac{\partial P}{\partial y} = 2(xz)yz + 2(1+xyz)z = 4yzx^2 + 2z \\ Q = 2(1+xyz)xz & \Longrightarrow & \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(yz)xz + 2(1+xyz)z = 4yzx^2 + 2z \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \ \boxed{\text{2 points}}$$

Donc $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$

$\dfrac{\partial P}{\partial x} = 2y^2z^2,$ $\boxed{\text{1 point}}$ $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2x^2z^2$ $\boxed{\text{1 point}}$ et $\dfrac{\partial R}{\partial z} = 2x^2y^2$ $\boxed{\text{1 point}}$

Alors $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = 2\left(y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2\right)$ $\boxed{\text{1 point}}$

2. On a $\omega = \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}, \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{H}$ est un champ conservatif et par suite $\omega$ est une différentielle totale $\boxed{\text{2 points}}$

3. $\omega = df \iff \overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla f}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2yz\,(1 + xyz)$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\Longrightarrow f = \displaystyle\int 2yz\,(1 + xyz)\, dx = xyz\,(xyz + 2) = 2xyz + x^2y^2z^2 + f\,(y,z)$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xz + 2x^2yz^2 + \dfrac{\partial g}{\partial y} = H_y = 2\,(1 + xyz)\,xz \Longrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \Longrightarrow g = g\,(z)$ $\boxed{\text{2 points}}$

$f = 2xyz + x^2y^2z^2 + g\,(z)$

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = 2xy + 2x^2y^2z + g' = H_z = 2\,(1 + xyz)\,xy \Longrightarrow g' = 0 \Longrightarrow g = Cte = C$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$f\,(x,y,z) = 2xyz + x^2y^2z^2 + C = xyz\,(2 + xyz) + C \quad \boxed{\text{1 point}}$$