Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers
le cnam Liban

Bases Scientifiques Mathématiques (MVA013)

Examen Final 2016-2017 **Durée 2h :00**

SOLUTIONS

Exercice 1 (20 points) Questions indépendantes :

1. Calculer les dérivées partielles f'_x et f'_y de la fonction $f(x,y) = x^{x+y}$.
2. Définir et représenter le domaine de définition de $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{y}}$.
3. Calculer df si $f(x,y,z) = \ln\left(2x^2+5y^5+8z^8\right)$
4. Soit $\overrightarrow{\omega} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$ un vecteur constant donné et $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$. Montrer que $\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}) = 2\overrightarrow{\omega}$.

SOLUTION. 1

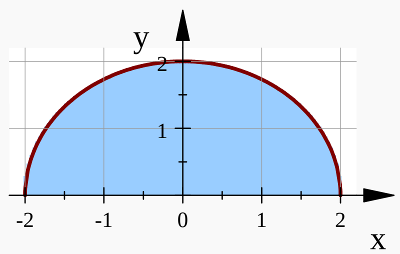
1. $\ln f = \ln\left(x^{x+y}\right) = (x+y)\ln x$ $\boxed{\textit{1 point}}$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial x} = \frac{\partial((x+y)\ln x)}{\partial x} \iff \frac{f'_x}{f} = \ln x + \frac{x+y}{x}.$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = x^{x+y}\left(\ln x + \frac{x+y}{x}\right) = x^{x+y-1}(x+y+x\ln x) \boxed{\textit{2 points}}$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial y} = \frac{\partial((x+y)\ln x)}{\partial y} \iff \frac{f'_y}{f} = \ln x \Longrightarrow f'_y = x^{x+y}\ln x \boxed{\textit{2 points}}$$

2. $f(x,y)$ est définie pour $y>0$ et $4-x^2-y^2 \geq 0$ donc pour $y>0$ et $x^2+y^2 \leq 4$, le domaine de définition est alors la partie supérieure du disque $x^2+y^2 \leq 4$ $\boxed{\textit{3 points}}$, Figure



$\boxed{\textit{2 points}}$

3. $$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \frac{4xdx + 25y^4dy + 64z^7dz}{2x^2+5y^5+8z^8} \boxed{\textit{5 points}}$$

4. $$\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\beta z - \gamma y)\overrightarrow{i} + (\gamma x - \alpha z)\overrightarrow{j} + (\alpha y - \beta x)\overrightarrow{k} \boxed{\textit{2 points}}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}) = (\alpha - (-\alpha))\overrightarrow{i} + (\beta - (-\beta))\overrightarrow{j} + (\gamma - (-\gamma))\overrightarrow{k}$$
$$= 2\alpha\overrightarrow{i} + 2\beta\overrightarrow{j} + 2\gamma\overrightarrow{k} = 2\overrightarrow{\omega} \boxed{\textit{3 points}}$$

Exercice 2 (20 points) Soit le champs vectoriel

$$\overrightarrow{H} = (ay + 4xz - 6)\ \overrightarrow{i} + \left(x - 3bzy^2 - 2\right)\ \overrightarrow{j} + \left(cx^2 - y^3\right)\ \overrightarrow{k}$$

où a, b, c sont des constantes.

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$
2. Déterminer les constantes a, b, c; $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$.
3. Avec les valeurs de a, b, c déja trouvées, déterminer le champ scalaire φ tel que : $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\varphi$

SOLUTION. 2

1. $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 4z - 6bzy$ $\boxed{\textit{3 points}}$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(-3y^2 + 3by^2\right)\ \overrightarrow{i} + (2cx - 4x)\ \overrightarrow{j} + (1 - a)\ \overrightarrow{k}\ \boxed{\textit{5 points}}$$

2. Si $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$ donc $b = 1, c = 2$ et $a = 1,$ $\boxed{\textit{3 points}}$ dans ce cas on aura :

$$\overrightarrow{H} = (y + 4xz - 6)\ \overrightarrow{i} + \left(x - 3zy^2 - 2\right)\ \overrightarrow{j} + \left(2x^2 - y^3\right)\ \overrightarrow{k} \qquad \boxed{\textit{2 points}}$$

3. Soit $\varphi = \varphi(x, y, z)$; $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla\varphi}$.

ona donc $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = y + 4xz - 6 \Longrightarrow \varphi = \displaystyle\int (y + 4xz - 6)\, dx = xy + 2x^2z - 6x + f(y, z)$ $\boxed{\textit{2 points}}$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x + \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - 3zy^2 - 2 \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = -3zy^2 - 2 \Longrightarrow f(y, z) = -zy^3 - 2y + g(z)$ $\boxed{\textit{2 points}}$

Soit $\varphi = xy + 2x^2z - 6x - zy^3 - 2y + g(z)$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 2x^2 - y^3 + g' = 2x^2 - y^3 \Longrightarrow g' = 0$ $\boxed{\textit{2 points}}$ et alors $g(z) = Cte = C$. Finalement :

$$\varphi(x, y, z) = xy + 2x^2z - 6x - zy^3 - 2y + C\ \boxed{\textit{1 point}}$$

Exercice 3 (20 points) Soit à calculer l'intégrale :

$$I = \int \frac{x^3}{1 + x^2} dx$$

1. Montrer que $\dfrac{x^3}{1 + x^2} = Ax + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 1}$ où A, B, C sont des réels à déterminer, puis calculer I
2. Calculer I en faisant un changement de varaible.
3. Déduire $J = \int \tan^3 t dt$.

SOLUTION. 3

1. Par décomposition en éléments simples :
   $f(x) = Ax + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} \Longrightarrow A = 1, B = -1$ et $C = 0$
   Soit $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$ $\boxed{3 \text{ points}}$

   ou bien $\dfrac{x^3}{1+x^2} = \dfrac{x^3+x-x}{1+x^2} = \dfrac{x(x^2+1)-x}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$

   $I = \int f(x)\,dx = \int x dx - \int \dfrac{xdx}{1+x^2}$
   $= \int x dx - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{d(x^2+1)}{1+x^2}$ $\boxed{2 \text{ points}}$
   $= \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1$ $\boxed{2 \text{ points}}$
2. $I = \int \dfrac{x^3}{1+x^2}dx = \int \dfrac{x^2 x}{1+x^2}dx$
   posons $u = 1+x^2$ donc $du = 2xdx \Longrightarrow xdx = \dfrac{1}{2}du$ et $x^2 = u-1$ $\boxed{3 \text{ points}}$
   $I = \int \dfrac{(u-1)}{u}\dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{2}\int\left(1-\dfrac{1}{u}\right)du = \dfrac{1}{2}(u - \ln u) + K$ $\boxed{2 \text{ points}}$
   $= \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + K = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1; C_1 = K + \dfrac{1}{2}$ $\boxed{2 \text{ points}}$
3. $u = \tan t \Longrightarrow du = (1+\tan^2 t)\,dt \Longrightarrow dt = \dfrac{du}{1+u^2}$ $\boxed{2 \text{ points}}$
   $J = \int \tan^3 t dt = \int \dfrac{u^3}{1+u^2}du = I$ $\boxed{2 \text{ points}}$
   $= \dfrac{1}{2}u^2 - \dfrac{1}{2}\ln(u^2+1) + C_2$
   $= \dfrac{1}{2}\left(\tan^2 t - \ln(1+\tan^2 t)\right) + C_2 = \dfrac{1}{2}\tan^2 t + \ln(\cos t) + C_2$ $\boxed{2 \text{ points}}$

Exercice 4 (20 points) On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 29y = xe^{2x} \qquad \textbf{(E)}$$

1. Déterminer y_g la solution générale de l'équation sans second membre.
2. Trouver y_p une solution particulière de l'équation avec second membre.
3. Donner la la solution générale de l'équation avec second membre.

SOLUTION. 4

1. ESSM : $y'' - 4y' + 29y = 0$
   l'équation caractéristique est : $\lambda^2 - 4\lambda + 29 = 0$ $\boxed{2 \text{ points}}$

$\Delta' = 4 - 29 = -25 = 25j^2$

Les racines sont complexes $\lambda_{1,2} = 2 \pm 5j$ 2 points

d'où :

$$y_g = e^{2x}\left(A\cos 5x + B\sin 5x\right) \quad \text{3 points}$$

2. Le second membre est $f(x) = xe^{2x}$, avec $m = 2$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique donc la solution particulière est $y_p = (ax+b)e^{2x}$ 2 points

$y_p' = (a + 2ax + 2b)e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x}$ 2 points

$y_p'' = (2a + 4ax + 2a + 4b)e^{2x} = 4(ax + a + b)e^{2x}$ 2 points

$y'' - 4y' + 29y = xe^{2x} \Longrightarrow 4(ax+a+b)e^{2x} - 4(2ax + a + 2b)e^{2x} + 29(ax+b)e^{2x} = xe^{2x}$

ou bien :

$4ax + 4a + 4b - 8ax - 4a - 8b + 29ax + 29b = x$ 2 points

$25b + 25ax = x \Longrightarrow b = 0 \text{ et } a = \dfrac{1}{25}$

Soit alors $y_p = \dfrac{1}{25}xe^{2x}$ 2 points

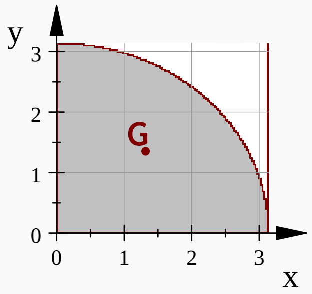
3. $y = y_g + y_p = e^{2x}\left(A\cos 5x + B\sin 5x\right) + \dfrac{1}{25}xe^{2x} = e^{2x}\left(A\cos 5x + B\sin 5x + \dfrac{1}{25}x\right)$ 3 points

Exercice 5 (20 points) Traiter au choix une question, parmis les deux suivantes

1. Soit (D) la portion du disque $x^2 + y^2 \leq \pi^2$ telle que $x \geq 0$ et $y \geq 0$. On suppose que D est homogène de densité surfacique de masse $\sigma = const$.
   - (a) Représenter le domain (D)
   - (b) Calculer la masse totale de (D).
   - (c) Déterminer la position du centre de gravité de (D).
   - (d) Calculer le moment d'inertie de (D) dans sa rotation autour de l'origine. Exprimer I_z en fonction de m
2. Soit la fonction la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$
   - (a) Calculer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4 de $\ln(1+x)$
   - (b) Calculer le D.L de $f(x)$ en 0 à l'ordre 3 Déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
   - (c) Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point $x = 0$ et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.

SOLUTION. 5

1. $D = \left\{(x,y) / x^2 + y^2 \leq \pi^2, x \geq 0, y \geq 0\right\}$



$\boxed{\textit{2 points}}$

(a) $m = \iint\limits_D \sigma dxdy = \sigma \iint\limits_D dxdy$

En coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le r \le \pi \\ y = r\sin\theta & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, $dxdy = rdrd\theta$ $\boxed{\textit{3 points}}$

$$m = \sigma \iint\limits_\Delta rdrd\theta = \sigma \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi/2} rd\theta \right) dr = \sigma \int_0^\pi \frac{\pi}{2} rdr = \sigma \left. \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{2} \right|_0^\pi = \frac{1}{4}\sigma\pi^3 \boxed{\textit{3 points}}$$

(b) Soit $G(X,Y)$ le centre de gravité de (D).

$$X = \frac{1}{m} \iint\limits_D x\sigma dxdy = \frac{4}{\pi^3} \iint\limits_D xdxdy \ \boxed{\textit{1 point}}$$

$$= \frac{4}{\pi^3} \iint\limits_\Delta (r\cos\theta)\, rdrd\theta = \frac{4}{\pi^3} \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi/2} r^2\cos\theta d\theta \right) dr \ \boxed{\textit{1 point}}$$

$$= \frac{4}{\pi^3} \left(\int_0^\pi r^2 dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \right) = \frac{4}{\pi^3} \left(\frac{r^3}{3} \right)_0^\pi (\sin\theta)_0^{\pi/2} = \frac{4}{3} \boxed{\textit{1 point}}$$

$$Y = \frac{1}{m} \iint\limits_D y\sigma dxdy = \frac{4}{\pi^3} \iint\limits_D ydxdy \boxed{\textit{1 point}}$$

$$= \frac{4}{\pi^3} \iint\limits_\Delta (r\sin\theta)\, rdrd\theta = \frac{4}{\pi^3} \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi/2} r^2\sin\theta d\theta \right) dr \ \boxed{\textit{1 point}}$$

$$= \frac{4}{\pi^3} \left(\int_0^\pi r^2 dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \right) = \frac{4}{\pi^3} \left(\frac{r^3}{3} \right)_0^\pi (-\cos\theta)_0^{\pi/2} = \frac{4}{3} \boxed{\textit{1 point}}$$

(c) $I_\Delta = \iint\limits_D \lambda^2 \sigma dxdy = \sigma \iint\limits_D (x^2+y^2)\, dxdy \boxed{\textit{2 points}}$

$$= \sigma \iint\limits_\Delta r^3 drd\theta = \sigma \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi/2} r^3 d\theta \right) dr \boxed{\textit{1 point}}$$

$$= \sigma \left(\int_0^\pi r^3 dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) = \sigma \left(\frac{\pi^4}{4} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{8}\pi^5\sigma \boxed{\textit{1 point}}$$

$$m = \frac{1}{4}\sigma\pi^3 \Longrightarrow \frac{I_z}{m} = \frac{\frac{1}{8}\pi^5\sigma}{\frac{1}{4}\sigma\pi^3} = \frac{1}{2}\pi^2 \Longrightarrow I_z = \frac{1}{2}m\pi^2 \ \boxed{\textit{2 points}}$$

2. $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$

(a) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \varepsilon(x)$ *3 points*

(b) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)} = \dfrac{x}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \varepsilon(x)} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \varepsilon(x)}$ *2 points*

Soit $X = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$

$f(x) = \dfrac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + O(X^4)$ *3 points*

$X^2 = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \varepsilon(x)\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)$

$X^3 = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \varepsilon(x)\right)^3 = -\frac{1}{8}x^3 + \varepsilon(x)$

$f(x) = 1 - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \varepsilon(x)\right) + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)\right) - \left(-\frac{1}{8}x^3 + \varepsilon(x)\right)$

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \varepsilon(x)$ *5 points*

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \varepsilon(x)\right) = 1$ *3 points*

(c) L'équation de la tangente à la courbe de f au point $x = 0$ est $y = 1 + \frac{1}{2}x$

$f - y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \varepsilon(x)$ *2 points*

Au voisinage de 0 le signe de la différence $f - y$ est celui de $-\frac{1}{12}x^2$ donc $f - y < 0$, donc la courbe de f est, au voisinage de 0, au dessous de la tangente *2 points*