Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Bases Scientifiques mathématiques - MVA013
Examen Final 2011-2012 Semestre I
Solutions

Exercice 1 (20 points) *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & -5 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Calculer A^2 et A^3.
3. Vérifier que $A^3 + 7A^2 - 40A - 38I = 0$. Déduire A^{-1}
4. Résoudre le système: $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = -3 \\ 3x - 7y - 5z = 4 \\ 5x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$

Solution 1 *:*

1. $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & -5 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 38 \neq 0$ donc A est inversible $\boxed{\text{2 points}}$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & -5 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & -5 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -19 & -10 \\ -40 & 70 & 54 \\ -9 & 37 & 34 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{3 points}}$

   $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 25 & -19 & -10 \\ -40 & 70 & 54 \\ -9 & 37 & 34 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & -5 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57 & 213 & 190 \\ 400 & -732 & -578 \\ 263 & -379 & -280 \end{pmatrix}$

   $\boxed{\text{4 points}}$

3. $A^3 + 7A^2 - 40A - 38I$

   $$= \begin{pmatrix} -57 & 213 & 190 \\ 400 & -732 & -578 \\ 263 & -379 & -280 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 25 & -19 & -10 \\ -40 & 70 & 54 \\ -9 & 37 & 34 \end{pmatrix} - 40\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & -5 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} - 38\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{\text{4 points}}$$

   $A^3 + 7A^2 - 40A - 38I = O \Longrightarrow A^2 + 7A - 40I = 38A^{-1}$

   $\Longrightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{38}\left(A^2 + 7A - 40I\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$= \frac{1}{38}\left[\begin{pmatrix} 25 & -19 & -10 \\ -40 & 70 & 54 \\ -9 & 37 & 34 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & -5 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} - 40\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 11 \\ -19 & -19 & 19 \\ 26 & 16 & -20 \end{pmatrix} \boxed{\text{2 points}}$$

4. On pose : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow (S) \Longleftrightarrow AX = B$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 11 \\ -19 & -19 & 19 \\ 26 & 16 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \boxed{\text{3 points}}$$

Exercice 2 (15 points) *On désigne par $f(x)$ la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

1. Montrer que $f(x)$ s'exprime sous la forme $f(x) = Ax + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ où A, B, C sont des réelles à déterminer.
2. Calculer, alors: $I = \int f(x)\,dx$.
3. En utilisant un changement convenable de variable Déduire $J = \int (\tan t)^3\,dt$.

Solution 2 $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$

1. On démontre que $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$ $\boxed{\text{3 points}}$
   Soit par division eucludienne
   Soit par décomposition en éléments simples $f(x) = Ax + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} \Longrightarrow A = 1, B = -1$ et $C = 0$
   ou bien $\dfrac{x^3}{1+x^2} = \dfrac{x^3+x-x}{1+x^2} = \dfrac{x\left(x^2+1\right)-x}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$
2. $I = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int xdx - \int \frac{xdx}{1+x^2}$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $= \displaystyle\int xdx - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $= \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C_1$ $\boxed{\text{2 points}}$
3. $u = \tan t \Longrightarrow du = \left(1+\tan^2 t\right)dt \Longrightarrow dt = \dfrac{du}{1+u^2}$ $\boxed{\text{3 points}}$
   $J = \displaystyle\int \tan^3 t dt = \int \frac{u^3}{1+u^2}du$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $= \dfrac{1}{2}u^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) + C_2$
   $= \dfrac{1}{2}\left(\tan^2 t - \ln\left(1+\tan^2 t\right)\right) + C_2 = \dfrac{1}{2}\tan^2 t + \ln(\cos t) + C_2$ $\boxed{\text{2 points}}$

Exercice 3 (15 points) *Soit f la fonction de deux variables réelles définie par :*

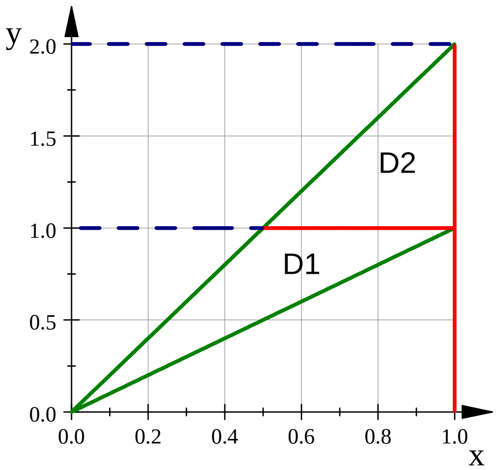
$$f(x,y) = x(y-1)$$

et D le domaine du plan xOy : $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x \leq y \leq 2x\right\}$.

1. Déssiner D.
2. Déterminer le signe de $f(x,y)$ sur D.
3. Calculer $I = \iint\limits_D |f(x,y)|\, dxdy$

Solution 3 *:*

1. Figure : $\boxed{\text{2 points}}$



2. $f(x,y) = x(y-1)$

   Sur D_1: $y < 1$ on a donc $f(x,y) < 0 \Longrightarrow |f| = x(1-y)$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Sur D_2, $y > 1$: $f(x,y) > 0 \Longrightarrow |f| = x(y-1)$ $\boxed{\text{1 point}}$

3. $I = \iint\limits_D |f(x,y)|\, dxdy = \iint\limits_{D_1} |f(x,y)|\, dxdy + \iint\limits_{D_2} |f(x,y)|\, dxdy$

   $= \iint\limits_{D_1} x(1-y)\, dxdy + \iint\limits_{D_2} x(y-1)\, dxdy$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Sur D_1 $(0 \leq y \leq 1)$: x varie de $x_m = \dfrac{y}{2}$ à $x_M = y$

   Sur D_2 $(1 \leq y \leq 2)$: x varie de $x_m = \dfrac{y}{2}$ à $x_M = 1$

   $I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y/2}^{y} x(1-y)\, dx \right) dy + \int\limits_1^2 \left(\int\limits_{y/2}^{1} x(y-1)\, dx \right) dy$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $I_1 = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y/2}^{y} x(1-y)\, dx \right) dy$

$$\int_{y/2}^{y} x\,(1-y)\,dx = -\frac{3}{8}y^2\,(y-1) = \frac{3}{8}\left(y^2-y^3\right) \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$I_1 = \frac{3}{8}\int_0^1 \left(y^2-y^3\right) dy = \frac{1}{32} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

$$I_2 = \int_1^2 \left(\int_{y/2}^{1} x\,(y-1)\,dx\right) dy$$

$$\int_{y/2}^{1} x\,(y-1)\,dx = -\frac{1}{8}y^3 + \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$I_2 = \int_1^2 \left(-\frac{1}{8}y^3 + \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right) dy = \frac{7}{96} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$I = \frac{1}{32} + \frac{7}{96} = \frac{5}{48} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

Exercice 4 (10 points) *Etudier la nature et calculer la somme si c'est possible des séries suivantes:*

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+2)} \qquad S_2 = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \qquad S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\,(n-1)}{5^n}$$

Solution 4 *:*

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+2)}$

   $u_n = \dfrac{1}{n\,(n+2)} \approx \dfrac{1}{n^2} \Longrightarrow S_1$ convergente $\boxed{\text{1 point}}$

   $$\frac{1}{n\,(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2\,(n+2)}$$

   $$S_N = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+2}\right)$$

   $$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{N+2}\right) \quad \boxed{\text{1 point}}$$

   $$S_1 = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{N+2}\right) = \frac{3}{4} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

2. $v_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \pi\dfrac{\sin\left(\pi/2^n\right)}{\pi/2^n}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Si $n \to +\infty : 2^n \to \infty \Longrightarrow \dfrac{\pi}{2^n} \to 0 \Longrightarrow \dfrac{\sin\left(\pi/2^n\right)}{\pi/2^n} \longrightarrow 1 \Longrightarrow v_n \to \pi \neq 0$ donc S_3 diverge $\boxed{\text{1 point}}$

3. soit $f\,(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

donc $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(x-1)^2} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(x-1)^2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) = \frac{2}{(1-x)^3} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

Pour $x = \frac{1}{5}$ on a $S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{5^n} = \frac{2(1/5)^2}{(1-1/5)^3} = \frac{5}{32}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Exercice 5 (20 points) *On considère les fonctions suivantes :*

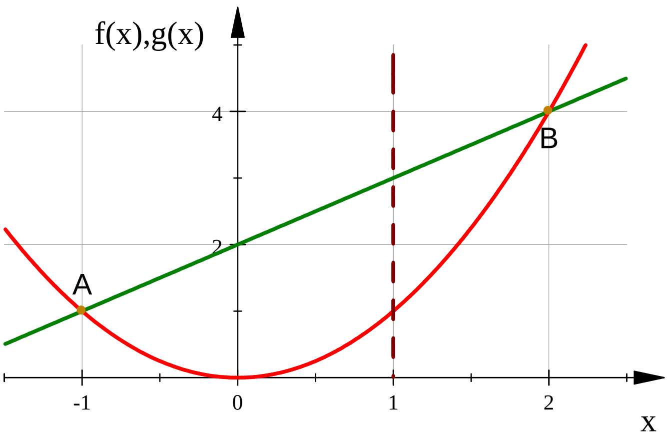
$$f(x) = x^2 \quad \textit{et} \quad g(x) = x + 2$$

et on désigne par A et B les points d'intersection des leurs courbes.

1. Tracer les courbes des ces fonctions dans le même repère orthonormé et déterminer les coordonnées des points A et B.
2. Calculer l'aire de la région limitée par les deux courbes à laide d'une intégrale simple, puis à l'aide d'une intégrale double.
3. Calculer les longueurs du segment $[AB]$ et de la branche parabolique $\widetilde{AB}$.

Solution 5 *:*

1. Graphes: $\boxed{\text{2+2=4 points}}$



Les points d'intersection sont tels que $x^2 = x + 2 \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \longrightarrow y = 4 : B(2,4) \\ x = -1 \rightarrow y = 1 : A(-1,1) \end{cases}$

$\boxed{\text{2 points}}$

2. $S = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) dx = \frac{9}{2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-1}^{2} \left(\int_{x^2}^{x+2} dy \right) dx = \frac{9}{2} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

3. $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}dx$ $\boxed{\text{1 point}}$

Le segment $[AB]$ est un segment de $g(x) = x + 2; g' = 1 \Longrightarrow d\ell = \sqrt{1+1}dx = \sqrt{2}dx$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$\ell_{[AB]} = \sqrt{2}\int_{-1}^{2} dx = 3\sqrt{2} \ \boxed{\text{1 point}}$$

$\widetilde{AB}$ est une branche du parabole $y = x^2 \Longrightarrow y' = 2x$

$$d\ell_{\widetilde{AB}} = \sqrt{1 + (2x)^2}dx = \sqrt{1 + 4x^2}dx \ \boxed{\text{1 point}}$$

$$\ell_{\widetilde{AB}} = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}dx$$

- <u>1ère méthode</u>:

On pose $x = \dfrac{\sinh\theta}{2} \Longrightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{1}{2}\cosh\theta d\theta \\ \sqrt{1+4x^2} = \cosh\theta \end{cases}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$= \frac{1}{2}\int \cosh^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{1 + \cosh 2\theta}{2}d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left(\theta + \frac{1}{2}\sinh 2\theta\right) = \frac{1}{4}\left(\theta + \sinh\theta\cosh\theta\right) \ \boxed{\text{1 point}}$$

on a $2x = \sinh\theta = \dfrac{e^\theta - e^\theta}{2} \Longrightarrow 4x = e^\theta - e^\theta \Longleftrightarrow e^{2\theta} - 4xe^\theta - 1 = 0$

$$\Longrightarrow \theta = \ln\left(2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right)$$

$$\cosh\theta = \sqrt{1 + \sinh^2\theta} = \sqrt{1 + 4x^2}$$

donc: $\displaystyle\int \sqrt{1 + 4x^2}dx = \frac{1}{4}\ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{4x^2 + 1}$ $\boxed{\text{1 point}}$

d'où: $\displaystyle\ell_{\widetilde{AB}} = \int_{-1}^{2}\sqrt{1 + 4x^2}dx = \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17} + 4\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5} - 2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \sqrt{17} = 6.125\,7$ $\boxed{\text{1 point}}$

- <u>2ème méthode</u>

On pose $x = \dfrac{1}{2}\tan t \Longrightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{1}{2}\left(1 + \tan^2 t\right)dt = \dfrac{dt}{2\cos^2 t} \\ \sqrt{1 + 4x^2} = \sqrt{1 + \tan^2 t} = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$\int \sqrt{1 + 4x^2}dx = \int \frac{\cos t dt}{2\cos^4 t}$$

On pose $u = \sin t \Longrightarrow du = \cos t dt$ et

$$\cos^4 t = \left(1 - \sin^2 t\right)^2 = \left(1 - u^2\right)^2 = (1 + u)^2(1 - u)^2$$

avec $u = \sin t = \dfrac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 & \rightarrow & u = -2/\sqrt{5} \\ x = 2 & \rightarrow & u = 4/\sqrt{17} \end{cases}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$\frac{1}{2(1 + u)^2(1 - u)^2} = \frac{1}{8(u + 1)} - \frac{1}{8(u - 1)} + \frac{1}{8(u - 1)^2} + \frac{1}{8(u + 1)^2}$$

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2/\sqrt{5}}^{4/\sqrt{17}} \frac{du}{(1+u)^2(1-u)^2} \boxed{\text{1 point}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2/\sqrt{5}}^{4/\sqrt{17}} \left(\frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{4(u-1)} + \frac{1}{4(u-1)^2} + \frac{1}{4(u+1)^2}\right) du = 6.1257 \boxed{\text{1 point}}$$

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{4(u-1)} + \frac{1}{4(u-1)^2} + \frac{1}{4(u+1)^2}\right) du$$

$$= \frac{1}{8}\left(\ln|1+u| + \ln|1-u| + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)$$

Exercice 6 (20 points) *On considère l'équation différentielle:*

$$y'' - y' - 6y = xe^{2x} \qquad \text{(D)}$$

1. Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre associée à (D).
2. Trouver une solution particulière de (D).
3. Déterminer la solution générale de l'équation complète (D).
4. Trouver la solution particulière de (D) vérifiant les conditions : $y(0) = \frac{3}{16}$ et $y'(0) = 0$.

Solution 6 $y'' - y' - 6y = xe^{2x}$

1. $y'' - y' - 6y = 0 \longrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $\Longrightarrow \lambda = 3, -2$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $y_g = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$ $\boxed{\text{2 points}}$
2. on propose la solution $y_p = (ax+b)e^{2x}$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $\Longrightarrow y_p' = ae^{2x} + 2(ax+b)e^{2x} = (2ax+a+2b)e^{2x}$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $y_p'' = 2ae^{2x} + 2(2ax+a+2b)e^{2x} = (4ax+4a+4b)e^{2x}$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $y'' - y' - 6y = xe^{2x} \Longrightarrow (4ax+4a+4b) - (2ax+a+2b) - 6(ax+b) = x$
   $\Longleftrightarrow -4ax + 3a - 4b = x$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $\Longrightarrow \begin{cases} -4a = 1 \\ 3a - 4b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left[a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{3}{16}\right]$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $$y_p = -\left(\frac{x}{4} + \frac{3}{16}\right)e^{2x} \quad \boxed{\text{1 point}}$$
3. Solution générale de (D)
   $$y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x} - \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{16}\right)e^{2x} \quad \boxed{\text{2 points}}$$
4. $y(0) = C_1 + C_2 - \frac{3}{16} = \frac{3}{16} \Longrightarrow C_1 + C_2 = \frac{3}{8}$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $y'(x) = 3C_1e^{3x} - 2C_2e^{-2x} - 2\left(\frac{x}{4} + \frac{3}{16}\right)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$y'(0) = 3C_1 - 2C_2 - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = 0$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\Longrightarrow 3C_1 - 2C_2 = \frac{5}{8}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\Longrightarrow C_1 = \frac{11}{40}$ et $C_2 = -\frac{1}{10}$ $\boxed{\text{1 point}}$