Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

le cnam
Liban

Bases Scientifiques mathématiques - MVA013-

Examen de rattrapage 2012-2013 **Durée : 3h.**

Dr Noureddine ASSAAD

Solutions

Exercice 1 (30 points) *On considère les matrices A et B telles que :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ et } B = A - I$$

où I est la matrice unitaire.

1. *Calculer A^2 et A^3. En déduire A^n $\forall n \in \mathbb{N}$.*
2. *Calculer en fonction de A et I : B^2 et B^3.*
3. *B est-elle inversible ? Justifier votre réponse.*
4. *Montrer que le polynôme caractéristique de A s'exprime $P(x) = -x^2(1+x)$*
5. *Déduire $Q(\lambda)$: le Polynôme caractéristique de B. Vérifier que $Q(B) = O$.*
6. *Déterminer B^{-1}*
7. *Déduire la solution du système linéaire :*

$$\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 4x - 3y + 2z = 14 \\ -2x + y - 2z = -8 \end{cases}$$

Solution 1 :

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -A$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $A^3 = A^2 A = -A^2 = A$ $\boxed{\text{1 point}}$

   On démontre par réccurence que $A^n = -(-1)^n A$. $\boxed{\text{3 points}}$

2. $B = A - I \Longrightarrow B^2 = A^2 + I - 2AI = -A + I - 2A = -3A + I$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $B^3 = (A - I)(-3A + I) = -3A^2 + 4AI - I = 3A + 4A - I = 7A - I$ $\boxed{\text{2 points}}$

3. $B = A - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

   $\det(B) = -2 \neq 0$ donc B est inversible. $\boxed{\text{2 points}}$

4. $P(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 1 \\ 4 & -2-x & 2 \\ -2 & 1 & -1-x \end{vmatrix}$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2-x & -1 & 1 & 2-x & -1 \\ 4 & -2-x & 2 & 4 & -2-x \\ -2 & 1 & -1-x & -2 & 1 \end{array}\right.$$

$= (2-x)(2+x)(1+x) + 4 + 4 - 2(2+x) - 2(2-x) - 4(1+x)$

$= (2-x)(2+x)(1+x) + 8 - 12 - 4x = (2-x)(2+x)(1+x) - 4 - 4x$

$= (2-x)(2+x)(1+x) - 4(1+x)$

$= (1+x)\left(4 - x^2 - 4\right) = -x^2(1+x)$ $\boxed{\text{5 points}}$

$P(A) = -A^2(I+A) = -A^3 - A^2 = -A - (-A) = O$ $\boxed{\text{2 points}}$

5. $Q(\lambda) = |B - \lambda I| = |A - I - \lambda I| = |A - (\lambda+1) I| = P(\lambda+1)$
   $Q(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda+2) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $Q(B) = -B^3 - 4B^2 - 5B - 2I = -(7A - I) - 4(-3A + I) - 5(A - I) - 2I = O$
6. $Q(B) \times B^{-1} = -B^2 - 4B - 5I - 2B^{-1} = O$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $B^{-1} = -\frac{1}{2}\left(B^2 + 4B + 5I\right) = -\frac{1}{2}(I - 3A + 4A - 4I + 5I)$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $= -\frac{1}{2}(A + 2I) = -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   $\boxed{\text{2 points}}$
7. Expression matricielle du système : $BX = M$ avec
   $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix}$
   la solution est : $X = B^{-1}M = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
   $x = 1 \qquad y = -2 \qquad z = 2$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 2 (20 points) *On désigne par $f(x)$ la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

1. *Montrer que $f(x)$ s'exprime sous la forme*

$$f(x) = Ax + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

   où A, B, C sont des réelles à déterminer.
2. *Calculer, alors :*

$$I = \int f(x)\, dx.$$

3. *En utilisant un changement convenable de variable déduire*

$$J = \int (\tan t)^3\, dt.$$

Solution 2 $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$

1. On démontre que $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$ $\boxed{\text{4 points}}$

   Soit par division eucludienne

   Soit par décomposition en éléments simples $f(x) = Ax + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} \Longrightarrow A = 1, B = -1$ et $C = 0$

   ou bien $\dfrac{x^3}{1+x^2} = \dfrac{x^3+x-x}{1+x^2} = \dfrac{x\left(x^2+1\right)-x}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$

2. $I = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int x dx - \int \frac{xdx}{1+x^2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $= \displaystyle\int x dx - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $= \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C_1$ $\boxed{\text{3 points}}$

3. $u = \tan t \Longrightarrow du = \left(1+\tan^2 t\right) dt \Longrightarrow dt = \dfrac{du}{1+u^2}$ $\boxed{\text{3 points}}$

   $J = \displaystyle\int \tan^3 t dt = \int \frac{u^3}{1+u^2} du = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) + C_2$ $\boxed{\text{3 points}}$

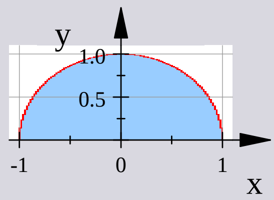
   $= \dfrac{1}{2}\left(\tan^2 t - \ln\left(1+\tan^2 t\right)\right) + C_2 = \dfrac{1}{2}\tan^2 t + \ln(\cos t) + C_2$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 3 (15 points) *Calculer*

$$\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$$

où D est le demi-disque $x^2+y^2 \leq 1$ et $y \geq 0$.

Solution 3 :



En coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ avec $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$ et $dxdy = rdrd\theta$ $\boxed{\text{1+1+2=4 points}}$

$I = \displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \iint_\Delta \frac{rdrd\theta}{1+r^2} = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \frac{rd\theta}{1+r^2}\right) dr$ $\boxed{\text{4 points}}$

$= \displaystyle\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}(\theta)_0^\pi\, dr = \pi\int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{d\left(1+r^2\right)}{1+r^2}$ $\boxed{\text{4 points}}$

$= \dfrac{\pi}{2}\ln\left(1+r^2\right)_0^1 = \dfrac{\pi}{2}\ln 2$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 4 (15 points) *Soit*

$$\omega(x,y) = \left(2xy^3+1\right)dx + \left(3x^2y^2-2y\right)dy$$

1. *Montrer que ω est une différentielle totale.*
2. *Déterminer un champ scalaire $f(x,y)$ tel que $\omega = df$.*

Solution 4 :$\omega = Pdx + Qdy$

1. $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x} \Longrightarrow \omega$ est une différentielle totale. $\boxed{\text{5 points}}$
2. $\omega = df \Longrightarrow P = \frac{\partial f}{\partial x}$

   $f(x,y) = \int (2xy^3 + 1)\, dx = x^2y^3 + x + g(y)$ $\boxed{\text{5 points}}$

   $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + g' = Q = 3x^2y^2 - 2y$

   $g' = -2y \Longrightarrow g(y) = -y^2 + C$

$$f(x,y) = x^2y^3 + x - y^2 + C \quad \boxed{\text{5 points}}$$

Exercice 5 (20 points) *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' + 5y' + 6y = e^x$$

Et donner une solution qui vérifie les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$

Solution 5 :

ESSM : $y'' + 5y' + 6y = 0$

Equation caractéristique : $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \Longrightarrow \Delta = 25 - 4 \times 6 = 1 > 0$ $\boxed{\text{3 points}}$

$\lambda_1 = \frac{-5+1}{2} = -2$ et $\lambda_2 = \frac{-5-1}{2} = -3 \Longrightarrow$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$y_g(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} \quad \boxed{\text{3 points}}$$

EASM :

$f(x) = e^x$ 1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $\Longrightarrow y_p = Ae^x$ $\boxed{\text{2 points}}$

$y_p' = Ae^x$ et $y_p'' = Ae^x$

$y'' + 5y' + 6y = e^x \Longrightarrow Ae^x + 5Ae^x + 6Ae^x = e^x \Longrightarrow A = \frac{1}{12}$ $\boxed{\text{3 points}}$

$$y_p = \frac{1}{12}e^x$$

La solution générale est : $y(x) = y_g + y_p$:

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{12}e^x \boxed{\text{2 points}}$$

$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{12} = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

$y'(x) = -2C_1e^{-2x} - 3C_2e^{-3x} + \frac{1}{12}e^x$

$y'(0) = -2C_1 - 3C_2 + \frac{1}{12} = -2$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{11}{12} \\ 2C_1 + 3C_2 = \frac{25}{12} \end{cases} \Longrightarrow \left[C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = \frac{1}{4} \right] \boxed{\text{2 points}}$$

La solution particulière est :

$$y\left(x\right) = \frac{2}{3} e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-3x} + \frac{1}{12} e^{x} \boxed{\text{1 point}}$$