Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Bases Scientifiques mathématiques - MVA013

Examen de ***rattrapage*** *2013-2014 -Semestre I* **Durée : 2h : 00**

Sujet coordonné par : Dr. Noureddine ASSAAD

centres de : Beyrouth, Bickfaya

SOLUTIONS

Exercice 1 (25 points) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2. En déduire $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Soit B la matrice définie par : $B = A - 2I,$ .où I est la matrice unité. Calculer B.
3. Calculer en fonction de A et I les matrices B^2 et B^3.
4. Montrer que $B^3 + 4B^2 + 5B + 2I = 0$ et déduire B^{-1}.
5. Déduire la solution du système linéaire

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 4x - 3y + 2z = -2 \\ -2x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

Solution 1

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ $\boxed{\text{3 points}}$

   Par reccurence on démontre que $A^n = A$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. $B = A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{3 points}}$

3. $B^2 = (A - 2I)^2 = A^2 - 4AI + 4I^2 = A^2 - 4A + 4I = -3A + 4I$ $\boxed{\text{3 points}}$

   $B^3 = B^2 B = (-3A + 4I)(A - 2I) = -3A^2 + 10AI - 8I^2$

   $= -3A + 10A - 8I = 7A - 8I$ $\boxed{\text{3 points}}$

4. $B^3 + 4B^2 + 5B + 2I = -(7A - 8I) - 4(-3A + 4I) - 5(A - 2I) - 2I = O$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $B^{-1} = -\frac{1}{2}\left(B^2 + 4B + 5I\right)$

   $= -\frac{1}{2}\left(-3A + 4I + 4(A - 2I) + 5I\right) = -\frac{1}{2}(A + I)$

Soit donc

$$B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boxed{3 \text{ points}}$$

5. Sous forme matricielle : $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \boxed{3 \text{ points}}$$

La Solution du système est : $x = -6$, $y = -4$ et $z = 5$ $\boxed{3 \text{ points}}$

Exercice 2 (15 points) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x+1|} - 1}{x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? Si oui, soit g son prolongement en 0.
3. Montrer que g est dérivable en 0.

Solution 2

1. $f(x)$ est définie pour tout $x \neq 0$ donc le domaine de définition est $\mathbb{R}^*$ $\boxed{2 \text{ points}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x+1|} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x+1|} - 1}{x} \times \frac{\sqrt{|x+1|} + 1}{\sqrt{|x+1|} + 1}$

   $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+1) - 1}{x\left(\sqrt{|x+1|} + 1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{|x+1|} + 1} = \frac{1}{2} \boxed{5 \text{ points}}$

   donc f est prolongeable par continuité en 0 $\boxed{1 \text{ point}}$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|x+1|} - 1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & si \quad x = 0 \end{cases} \boxed{1 \text{ point}}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sqrt{|x+1|} - 1}{x} - \frac{1}{2}}{x}$

   $= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2\sqrt{|x+1|} - x - 2}{2x^2}\right) \boxed{2 \text{ points}}$

$$\frac{2\sqrt{|x+1|}-x-2}{2x^2}=\frac{2\sqrt{|x+1|}-x-2}{2x^2}\times\frac{2\sqrt{|x+1|}+x+2}{2\sqrt{|x+1|}+x+2}$$
$$=\frac{4(x+1)-(x+2)^2}{2x^2\left(2\sqrt{|x+1|}+x+2\right)}=\frac{-x^2}{2x^2\left(2\sqrt{|x+1|}+x+2\right)}=-\frac{1}{2\left(2\sqrt{|x+1|}+x+2\right)}$$
$\boxed{\text{2 points}}$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{2\left(2\sqrt{|x+1|}+x+2\right)}=-\frac{1}{8}\ \boxed{\text{2 points}}$$

alors g est dérivable en 0

Exercice 3 (15 points) Résoudre l'équation différentielle

$$x''+2x'+x=e^{-2t}$$

Solution 3

La solution générale est : $x=x_g+x_p$ où x_g est la solution générale de l'ESSM et x_p est une solution particulière de l'EASM

- ESSM : $x''+2x'+x=0$

  L'équation caractéristique :$\lambda^2+2\lambda+1=0 \Longleftrightarrow (\lambda+1)^2=0$ $\boxed{\text{2 points}}$

  $\lambda=-1$ est une racine double $\boxed{\text{2 points}}$

  donc $x_g=(\alpha t+\beta)\,e^{-t}$ $\boxed{\text{3 points}}$
- EASM :

  La solution est de la forme $x_p=ce^{-2t}$ comme $\lambda\neq -2$ $\boxed{\text{2 points}}$

  $x_p'=-2ce^{-2t}$ et $x_p''=4ce^{-2t}$ $\boxed{\text{2 points}}$

  $x''+2x'+x=e^{-2t}\Longrightarrow (4c-4c+c)\,e^{-2t}=e^{-2t}\Longrightarrow c=1$ et donc $x_p=e^{-2t}$. $\boxed{\text{2 points}}$

Soit finalement :

$$x(t)=(\alpha t+\beta)\,e^{-t}+e^{-2t}\qquad \boxed{\text{2 points}}$$

Exercice 4 (15 points) Calculer

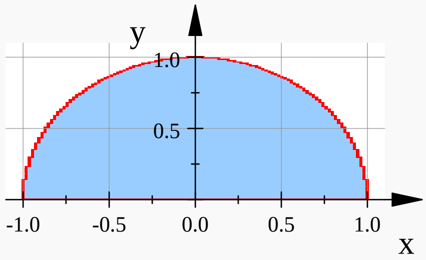
$$\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$$

où D est le demi-disque $x^2+y^2\le 1$ et $y\ge 0$.

Solution 4

En coordonnées polaires : $\begin{cases} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ et $dxdy=rdrd\theta$

avec $\begin{cases} 0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le\pi\end{cases}$ $\boxed{\text{3 points}}$



$$I=\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2}=\iint\limits_{\Delta}\frac{rdrd\theta}{1+r^2}=\int_0^1\left(\int_0^{\pi}\frac{rd\theta}{1+r^2}\right)dr \quad \boxed{\text{4 points}}$$

$$=\int_0^1\frac{r}{1+r^2}(\theta)_0^{\pi}dr=\pi\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{d\left(1+r^2\right)}{1+r^2} \quad \boxed{\text{4 points}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\left(1+r^2\right)_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2 \quad \boxed{\text{4 points}}$$

Exercice 5 (30 points) Soit le champ vectoriel

$$\overrightarrow{H}=(y+2xz-1)\overrightarrow{i}+\left(x-3zy^2-1\right)\overrightarrow{j}+\left(x^2-y^3\right)\overrightarrow{k}$$

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif.
3. Déterminer le potentiel scalaire $\varphi(x,y,z)$ associé à $\overrightarrow{H}$.

Solution 5

Soit $\overrightarrow{H}=(y+2xz-1)\overrightarrow{i}+\left(x-3zy^2-1\right)\overrightarrow{j}+\left(x^2-y^3\right)\overrightarrow{k}=P\overrightarrow{i}+Q\overrightarrow{j}+R\overrightarrow{k}$

1. $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=2z-6yz$ $\boxed{\text{3 points}}$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

$$=\left(-3y^2+3y^2\right)\overrightarrow{i}+(2x-2x)\overrightarrow{j}+(1-1)\overrightarrow{k}=\overrightarrow{0} \quad \boxed{\text{5 points}}$$

2. Puisque $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}=\overrightarrow{0}$,alors $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif $\Longleftrightarrow \exists\varphi=\varphi(x,y,z)$ tel que $\overrightarrow{H}=\overrightarrow{\nabla}\varphi$ $\boxed{\text{5 points}}$
3. $\overrightarrow{H}=\overrightarrow{\nabla}\varphi$

$$\Longleftrightarrow (y+2xz-1)\overrightarrow{i}+\left(x-3zy^2-1\right)\overrightarrow{j}+\left(x^2-y^3\right)\overrightarrow{k}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\overrightarrow{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\overrightarrow{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=y+2xz-1\Longrightarrow\varphi=\int(y+2xz-1)\,dx=xy+x^2z-x+f(y,z) \quad \boxed{\text{5 points}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x-3zy^2-1\Longleftrightarrow x+\frac{\partial f}{\partial y}=x-3zy^2-1\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}=-3zy^2-1$$

$$f(y,z) = \int \left(-3zy^2 - 1\right) dy = -zy^3 - y + g(z) \ \boxed{\text{5 points}}$$

$$\varphi = xy + x^2z - x - zy^3 - y + g(z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x^2 - y^3 \Longleftrightarrow x^2 - y^3 + g'(z) = x^2 - y^3 \Longrightarrow g' = 0 \ \text{ donc } g = ct^e = C \ \boxed{\text{4 points}}$$

$$\varphi(x,y,z) = xy + x^2z - x - zy^3 - y + C \boxed{\text{3 points}}$$