Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Equations différentielles

Exercice 1 Montrer que les fonctions ci-dessous dépendant de constantes arbitraires satisfont aux équations différentielles en regard :

Fonction	Equation
$\sin x - 1 + ce^{-\sin x}$	$y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
$cx + c + c^2$	$y'^2 - (1+x)\,y' + y = 0$
$\frac{C_1}{x} + C_2$	$y'' + \frac{2}{x}y' = 0$

Solution 1

1. $y = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}$
   $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sin x - 1 + ce^{-\sin x}\right) = \cos x - c\,(\cos x)\,e^{-\sin x}$$
   $$y' + y\cos x = \cos x - c\,(\cos x)\,e^{-\sin x} + \left(\sin x - 1 + ce^{-\sin x}\right)\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$
2. $y = cx + c + c^2$
   $$y' = \frac{d}{dx}\left(cx + c + c^2\right) = c$$
   $$-y'^2 - (1+x)\,y' + y = -c^2 - (1+x)\,c + cx + c + c^2 = 0$$
3. $y = \frac{C_1}{x} + C_2$
   $$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{C_1}{x} + C_2\right) = -\frac{C_1}{x^2}$$
   $$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{C_1}{x^2}\right) = \frac{2C_1}{x^3}$$
   $$y'' + \frac{2}{x}y' = \frac{2C_1}{x^3} + \frac{2}{x}\left(-\frac{C_1}{x^2}\right) = 0$$

Exercice 2 Intégrer les équations différentielles à variables séparables

1. $ydx - xdy = 0$
2. $(1+x)\,ydx + (1-y)\,xdy = 0$
3. $(1+y)\,dx - (1-x)\,dy = 0$
4. $dy + y\tan xdx = 0$
5. $\sin y\cos xdx + \cos y\sin xdy = 0$
6. $y' = (1+y^2)\,e^x$
7. $xy'\ln x = (3\ln x + 1)\,y, (x > 0)$
8. $y'y = xe^{x^2 - y^2}$
9. $-xy'y^2 + (1 - x^2) = 0$
10. $y' = \frac{1 + 3x^2}{3y^2 - 6y}$

Solution 2

1. $ydx - xdy = 0$

   $ydx = xdy \Longrightarrow \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$

   $\Longrightarrow \int \dfrac{dx}{x} = \int \dfrac{dy}{y} \Longrightarrow \ln x + C = \ln y \Longrightarrow$

   $$y = kx$$

2. $(1+x)\,ydx + (1-y)\,xdy = 0$

   $(1+x)\,ydx = -\,(1-y)\,xdy \Longrightarrow -\dfrac{1-y}{y}dy = \dfrac{1+x}{x}dx$

   $\Longrightarrow -\displaystyle\int \frac{1-y}{y}dy = \int \frac{1+x}{x}dx$

   $\Longrightarrow -\ln y + y = x + \ln x + C$

   $\Longrightarrow \ln\left(\dfrac{e^y}{y}\right) = \ln\left(kxe^x\right)$

   $$\frac{e^y}{y} = kxe^x$$

3. $(1+y)\,dx - (1-x)\,dy = 0$

   $(1+y)\,dx = (1-x)\,dy \Longrightarrow \dfrac{dy}{1+y} = \dfrac{dx}{1-x}$

   $\Longrightarrow \ln(1+y) = -\ln(1-x) + C$

   $\Longrightarrow 1 + y = \dfrac{K}{x-1}$

   $\Longrightarrow y = \dfrac{K}{x-1} - 1$

   $$y = \frac{K - x + 1}{x-1}$$

4. $dy + y\tan xdx = 0$

   $dy = -y\tan xdx$

   $\Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{\sin x}{\cos x}dx = \dfrac{d(\cos x)}{\cos x}$

   $\Longrightarrow \ln y = \ln\cos x + C$

   $$y = K\cos x$$

5. $\sin y\cos xdx + \cos y\sin xdy = 0$

   $\cos y\sin xdy = -\sin y\cos xdx$

   $\Longrightarrow \dfrac{\cos y}{\sin y}dy = -\dfrac{\cos x}{\sin x}dx$

   $\Longrightarrow \ln(\sin y) = -\ln(\sin x) + C$

   $$\sin y = \frac{K}{\sin x}$$

6. $\dfrac{dy}{dx} = (1+y^2)\, e^x$
$\Longrightarrow \dfrac{dy}{1+y^2} = e^x dx$
$\displaystyle\int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^x dx$
$\Longrightarrow \arctan y = e^x + C = Ke^x$

$$y = \tan\left(Ke^x\right)$$

7. $\dfrac{dy}{dx} x \ln x = (3\ln x + 1)\, y$
$\Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{3\ln x + 1}{x \ln x} dx = \left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x\ln x}\right) dx$
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3dx}{x} + \int \frac{dx}{x\ln x}$
$\Longrightarrow \ln y = 3\ln x + \ln(\ln x) + C = \ln\left(Kx^3 \ln x\right)$

$$y = Kx^3 \ln x, \quad (x > 0)$$

8. $\dfrac{dy}{dx} y = xe^{x^2} e^{y^2}$
$\Longrightarrow ye^{y^2} dy = xe^{x^2} dx$
$\displaystyle\int ye^{y^2} dy = \int xe^{x^2} dx$
$\Longrightarrow \dfrac{1}{2} e^{y^2} = \dfrac{1}{2} e^{x^2} + C$
$y^2 = \ln\left(e^{x^2} + C\right)$

$$y = \pm\sqrt{\ln\left(e^{x^2} + C\right)}$$

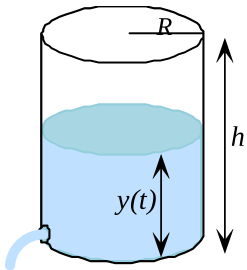
9. $-x\dfrac{dy}{dx} y^2 + (1-x^2) = 0$
$\Longrightarrow y^2 dy = \dfrac{1-x^2}{x} dx = \left(\dfrac{1}{x} - x\right) dx$
$\displaystyle\int y^2 dy = \int \left(\frac{1}{x} - x\right) dx$
$\dfrac{1}{3} y^3 = \ln x - \dfrac{1}{2} x^2 + C$

$$y = \sqrt[3]{\ln x^3 - \frac{3}{2} x^2 + C}$$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+3x^2}{3y^2 - 6y}$
$(3y^2 - 6y)\, dy = (1+3x^2)\, dx$
$\displaystyle\int (3y^2 - 6y)\, dy = \int (1+3x^2)\, dx$
$\Longrightarrow y^3 + 3y^2 = x + x^3 + C$

$$y^3 + 3y^2 - x - x^3 = C$$

Exercice 3 On considère un récipient cylindrique de hauteur h et de rayon de base R contenant un liquide non visqueux, le récipient est percé en bas par un petit trou circulaire rayon r.



Suivant la loi de Torricelli l'écoulement du liquide est régit par l'équation différentielle :

$$\frac{dV}{dt} + kA\sqrt{y} = 0 \qquad (E_1)$$

Où à l'instant t :$V = V(t)$ est le volume de l'eau dans le récipient , $y = y(t)$ est sa hauteur, A est la section du trou et k une constante positive. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le récipient était plein $(y(0) = h)$.

1. Montrer que l'équation (E_1) s'écrit, sous la forme :

$$\frac{dy}{dt} = -k\alpha^2\sqrt{y} \qquad (E_2)$$

   où $\alpha = \dfrac{r}{R}$.
2. En intégrant l'équation (E_2) ,dèterminer la variation de hauteur du liquide $y(t)$.
3. A quelle instant le récipient devient vide ?
   Applications numériques :
   $h = 250\,\text{cm} \qquad R = 40\,\text{cm} \qquad r = 1\,\text{cm} \qquad k = 26\,\text{cm}^{1/2}.\text{s}^{-1}$

Solution 3

1. Le volume du liquide, à l'instant t, dans le récipient est : $V(t) = \pi R^2 y$, R est le rayon du base du récipient, c'est une constant, donc

$$\frac{dV}{dt} = \pi R^2 \frac{dy}{dt}$$

   L'équation (E_1) s'écrit : $\dfrac{dV}{dt} = -kA\sqrt{y}$, or A est la section du trou : $A = \pi r^2$ donc on a : $\pi R^2 \dfrac{dy}{dt} = -k\pi r^2\sqrt{y}$ ou bien :

$$\frac{dy}{dt} = -k\frac{r^2}{R^2}\sqrt{y} = -k\alpha^2\sqrt{y}$$

2. L'équation (E_2) est une équation différentielle du premier order à variable séparables, alors :

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = -k\alpha^2 dt$$

Intégrons les deux membres :
$\int y^{-1/2}dt = -k\alpha^2 \int dt \Longrightarrow 2\sqrt{y(t)} = -k\alpha^2 t + C$
$\Longrightarrow y(t) = \frac{1}{4}\left(C - k\alpha^2 t\right)^2$
$y(0) = h \Longrightarrow C = 2\sqrt{h}$ d'où :

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{h} - k\alpha^2 t\right)^2$$

3. Le récipient devient vide à l'instant t_1 tel que : $y(t_1) = 0 \Longleftrightarrow 2\sqrt{h} - k\alpha^2 t_1 = 0$ d'où :

$$t_1 = \frac{2\sqrt{h}}{k\alpha^2} = \frac{2R^2\sqrt{h}}{kr^2}$$

App.Num. :
$t_1 = \frac{2 \times 1600 \times \sqrt{250}}{26 \times 1} = \frac{8000}{13}\sqrt{10} = 1946\,\mathrm{s} \approx 32.4\,\mathrm{min}.$

Exercice 4 A l'instant $t = 0$ on lance, vers le haut, un objet de masse m avec une vitesse initiale v_0.

Durant son mouvement l'objet est soumis à son poids $p = mg$ et à la résistance de l'aire $R = kv^2$où g est l'accélération du pésanteur et k est une constante positive.

D'après la deuxième loi de Newton le mouvement est décrivé par l'équation différentielle :

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2 \qquad (E)$$

1. Déterminer la loi de vitesse $v = v(t)$.
2. Applications numériques :

$m = 0.2\,\mathrm{kg} \qquad k = 4 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg/\,m} \qquad g = 10\,\mathrm{m/\,s^2} \qquad v_0 = 28\,\mathrm{m/\,s}$

Solution 4

1. Pour déterminer la loi de vitesse, il faut résoudre l'équation différentielle (E) qui se ramène à une équation à variables séparables.

En divisant par m l'équation (E) s'écrit : $\frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m}v^2 = -\frac{k}{m}\left(\frac{mg}{k} + v^2\right)$

Posons $a^2 = \frac{mg}{k}$ et en séparant les variables on obtient :

$$\frac{dv}{a^2 + v^2} = -\frac{k}{m}dt$$

Soit, en intégrant :
$\frac{1}{a}\arctan\frac{v}{a} = -\frac{k}{m}t + C \Longleftrightarrow \arctan\frac{v}{a} = -\frac{ka}{m}t + aC$
pour $t = 0 : v = v_0 \Longrightarrow \arctan\frac{v_0}{a} = aC$, on a alors $C = \frac{1}{a}\arctan\frac{v_0}{a}$

$\arctan \frac{v}{a} = -\frac{ka}{m}t + \arctan \frac{v_0}{a}$

$\Longrightarrow v(t) = a \tan\left(-\frac{ka}{m}t + \arctan \frac{v_0}{a}\right)$ soit :

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tan\left(-\sqrt{\frac{kg}{m}}t + \arctan v_0\sqrt{\frac{k}{mg}}\right)$$

2. Applications numériques :

$m = 0.2\,\mathrm{kg} \qquad k = 4\times 10^{-6}\,\mathrm{kg/\,m} \qquad g = 10\,\mathrm{m/\,s^2} \qquad v_0 = 28\,\mathrm{m/\,s}$

$\sqrt{\frac{mg}{k}} = \sqrt{\frac{0.2\times 10}{4\times 10^{-6}}} = \frac{10^3}{\sqrt{2}} = 500\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{kg}{m}} = \sqrt{\frac{4\times 10^{-6}\times 10}{0.2}} = \sqrt{2}\times 10^{-2}$

$v_0\sqrt{\frac{k}{mg}} = \frac{28}{707.11} = 3.9598\times 10^{-2}$

$\arctan v_0\sqrt{\frac{k}{mg}} = \arctan\left(3.9598\times 10^{-2}\right) = 3.9577\times 10^{-2}\,\mathrm{rad} \approx 4\times 10^{-2}\,\mathrm{rad}$

$$v(t) = 500\sqrt{2}\tan\left(\frac{4-\sqrt{2}t}{100}\right)$$

Exercice 5 Intégrer les équations homogènes

1. $(y-x)\,dx + (y+x)\,dy$
2. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$
3. $xy^2y' = x^3 + y^3$

Solution 5

1. $(y-x)\,dx + (y+x)\,dy = 0$

on a $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y-x}{y+x} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{1-y/x}{1+y/x} = \frac{1-u}{1+u}$

avec $u = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = xu \Longrightarrow y' = u + xu' = u + x\frac{du}{dx}$

$\Longrightarrow u + x\frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u} \Longrightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u} - u = \frac{-u^2-2u+1}{u+1}$

$\Longrightarrow \frac{u+1}{1-2u-u^2}du = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \int \frac{u+1}{1-2u-u^2}du = \int \frac{dx}{x}$

$\Longrightarrow -\frac{1}{2}\ln\left(u^2+2u-1\right) = \ln x + C = \ln kx$

$\frac{1}{\sqrt{u^2+2u-1}} = kx \Longrightarrow \frac{1}{k^2x^2} = u^2+2u-1 = \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} - 1 = \frac{y^2+2xy-x^2}{x^2}$

soit pour $x \neq 0$

$$y^2 + 2xy - x^2 = k'^2$$

2. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$

$y' = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x} = \sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}} + \dfrac{y}{x}$

on pose $u = \dfrac{y}{x}$

$\Longrightarrow y' = u + xu' = \sqrt{1+u^2} + u$

$xu' = \sqrt{1+u^2} \Longrightarrow \dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \dfrac{dx}{x}$

$\int \dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arcsinh} u = \int \dfrac{dx}{x} = \ln kx$

On a $\operatorname{arcsinh} u = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)$

on écrit alors :

$\ln\left(\dfrac{y}{x} + \sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\right) = \ln|kx|$

ce qui donne : $\dfrac{y}{x} + \sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}} = kx$ ou bien :

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = kx^2$$

3. $xy^2y' = x^3 + y^3$

$y' = \dfrac{x^3+y^3}{xy^2} = \dfrac{1+(y/x)^3}{(y/x)^2}$

soit $u = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$

$y' = u + xu' = \dfrac{1+u^3}{u^2}$

$\Longrightarrow x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1+u^3}{u^2} - u = \dfrac{1+u^3-u^3}{u^2} = \dfrac{1}{u^2}$

$u^2du = \dfrac{dx}{x} \Longrightarrow \dfrac{u^3}{3} = \ln x + c = \ln x + \ln k = \ln kx$

$\Longrightarrow \dfrac{y^3}{x^3} = 3\ln kx$

$$y = x\sqrt[3]{3\ln kx}$$

Exercice 6 Intégrer les équations différentielles linéaires

1. $y' + y = e^x$
2. $y'\cos x + y\sin x = 1$
3. $xy' + ny = ax^n$
4. $y' - \dfrac{2y}{1+x} = (1+x)^3$
5. $y' - \dfrac{n}{x}y = x^ne^x$
6. $xy' = ay + x + 1$

Solution 6

1. $y' + y = e^x$

   ESSM : $y' + y = 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = -y \Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = -dx$

   $\ln y = -x + C \Longrightarrow y_1 = e^{-x+C} = ke^{-x}$

   EASM : soit $k = k(x) \Longrightarrow y_2 = k(x)\, e^{-x} \Longrightarrow y_2' = k'e^{-x} - ke^{-x}$

   $y_2' + y_2 = e^x \Longrightarrow k'e^{-x} - ke^{-x} + ke^{-x} = e^x$

   $k' = e^{2x} \Longrightarrow k = \dfrac{1}{2}e^{2x} \Longrightarrow y_2 = \dfrac{1}{2}e^{2x}e^{-x} = \dfrac{1}{2}e^x$

   $$y(x) = ke^{-x} + \frac{1}{2}e^x$$

2. $y' \cos x + y \sin x = 1$

   ESSM : $y' \cos x + y \sin x = 0$

   $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin x}{\cos x}y \Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{\sin x}{\cos x}dx = \dfrac{d(\cos x)}{\cos x}$

   par intégration on trouve : $\ln y = \ln \cos x + c = \ln \cos x + \ln k = \ln k \cos x$

   $$y_1 = k \cos x$$

   EASM : $k = k(x) \Longrightarrow y_2' = k' \cos x - k \sin x$

   $y_2' \cos x + y_2 \sin x = 1 \Longrightarrow (k' \cos x - k \sin x) \cos x + k \cos x \sin x = 1$

   $k' \cos^2 x = 1 \Longrightarrow k' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow k = \tan x$

   $y_2 = \tan x \cos x = \sin x$

   $$y(x) = k \cos x + \sin x$$

3. $xy' + ny = ax^n$

   ESSM : $xy' + ny = 0 \Longrightarrow x\dfrac{dy}{dx} = -ny \Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = -n\dfrac{dx}{x}$

   $\Longrightarrow \ln y = -n \ln x + \ln k = \ln \dfrac{k}{x^n}$

   $y_1 = \dfrac{k}{x^n}$

   EASM : $y_2 = \dfrac{k(x)}{x^n} \Longrightarrow y_2' = \dfrac{k'x^n - nkx^{n-1}}{x^{2n}} = \dfrac{1}{x^{n+1}}(xk' - kn) = \dfrac{k'}{x^n} - n\dfrac{k}{x^{n+1}}$

   $xy' + ny = ax^n \Longrightarrow x\left(\dfrac{k'}{x^n} - n\dfrac{k}{x^{n+1}}\right) + n\dfrac{k}{x^n} = ax^n$

   $k'x^{1-n} = ax^n \Longrightarrow k' = ax^nx^{n-1} = ax^{2n-1} \Longrightarrow k = \dfrac{a}{2n}x^{2n}$

   $y_2 = \dfrac{a}{2n}x^{2n} \times \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{a}{2n}x^n$

   $$y(x) = \frac{k}{x^n} + \frac{a}{2n}x^n$$

4. $y' - \dfrac{2y}{1+x} = (1+x)^3$

   ESSM : $y' - \dfrac{2y}{1+x} = 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{1+x} \Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{2dx}{1+x}$

$\ln y = 2\ln(1+x) + C = \ln k(1+x)^2$

$$y = k(1+x)^2$$

EASM : $k = k(x) \Longrightarrow y' = k'(1+x)^2 + 2k(1+x)$

$y' - \dfrac{2y}{1+x} = (1+x)^3$

$\Longrightarrow k'(1+x)^2 + 2k(1+x) - 2\dfrac{k(1+x)^2}{1+x} = (1+x)^3$

$k'(1+x)^2 = (1+x)^3 \Longrightarrow k' = (1+x) \Longrightarrow k = x + \dfrac{x^2}{2}$

$y_2 = \left(x + \dfrac{x^2}{2}\right)(1+x)^2$

$$y = \left(k + x + \frac{x^2}{2}\right)(1+x)^2$$

5. $y' - \dfrac{n}{x}y = x^n e^x$

ESSM : $y' - \dfrac{n}{x}y = 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{n}{x}y \Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = n\dfrac{dx}{x}$

$\ln y = n\ln x + C = \ln kx^n \Longrightarrow y_1 = kx^n$

EASM : $y_2 = k(x)x^n \Longrightarrow y_2' = k'x^n + nkx^{n-1}$

$y' - \dfrac{n}{x}y = x^n e^x \Longrightarrow k'x^n + nkx^{n-1} - \dfrac{n}{x}kx^n = x^n e^x \Longrightarrow k' = e^x \Longrightarrow k = e^x$

$y_2 = x^n e^x$

$$y = (k + e^x)x^n$$

6. $xy' - ay = x + 1$

ESSM : $xy' = ay \Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = a\dfrac{dx}{x} \Longrightarrow y = kx^a$

EASM : $xy' - ay = x + 1$

$y = k(x)x^a \Longrightarrow y' = k'x^a + akx^{a-1}$

$xy' - ay = x + 1 \Longrightarrow x\left(k'x^a + akx^{a-1}\right) - akx^a = x + 1 \Longrightarrow k'x^{a+1} = x + 1$

$k' = \dfrac{1}{x^a} + \dfrac{1}{x^{a+1}}$

$k = \int \left(\dfrac{1}{x^a} + \dfrac{1}{x^{a+1}}\right) dx = \dfrac{a + ax - 1}{ax^a(1-a)}$

$y_2 = \dfrac{a + ax - 1}{ax^a(1-a)}x^a = \dfrac{a + ax - 1}{a(1-a)}$

$$y = kx^a + \frac{a + ax - 1}{a(1-a)}$$

Exercice 7 Une boule de glace G de masse variable $M = M(t)$,tombe en chute suivant la verticale Oz.Parsuite de la fusion, la masse de boule varie suivant la loi $M(t) = m - at$, où m est la masse initiale et a est une constante positive. On suppose que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse de l'objet : $f = kv$. où $v = \dfrac{dz}{dt}$

La deuxième loi de Newton s'écrit suivant l'axe Oz :

$$\frac{d\left(Mv\right)}{dt}=Mg-f$$

1. On admet $k=3a$.Montrer que la vitesse de G vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dt}+\frac{2a}{m-at}v=g \tag{E}$$

2. Resoudre l'équation $\left(E\right)$,et déterminer la loi générale de la vitesse $v=v\left(t\right)$.
3. Déterminer la solution particulière telle que $v\left(0\right)=v_0=0$.
4. Déduire l'expression de l'élongation $z=z\left(t\right)$ telle que $z\left(0\right)=0$.
5. Déterminer l'instant $t=t_1$où la masse devient la moitié de la masse initiale, calculer à cet instant la vitesse et la distance parcourue
6. Déterminer l'instant $t=t_2$ où la fusion est complète $\left(M=0\right)$, calculer à cet instant la vitesse et la distance parcourue.

Solution 7

$M=m-at>0$

1. $\dfrac{d\left(Mv\right)}{dt}=\dfrac{dM}{dt}v+M\dfrac{dv}{dt}=-av+M\dfrac{dv}{dt}$

   $\dfrac{d\left(Mv\right)}{dt}=Mg-f\Longleftrightarrow -av+M\dfrac{dv}{dt}=Mg-3av\Longrightarrow M\dfrac{dv}{dt}+2av=Mg$

   Divisons par M : $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{2a}{M}v=g$ d'où :

$$\frac{dv}{dt}+\frac{2a}{m-at}v=g \tag{E}$$

2. L'équation sans sécond membre est :

$$\frac{dv}{dt}+\frac{2a}{m-at}v=0 \tag{E$_{SSM}$}$$

   En séparant les variables on obtient : $\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{2a}{m-at}dt$

   L'intégration de deux membres nous donne :

   $\ln v=2\ln\left(m-at\right)+K=2\ln\left(m-at\right)+\ln C=\ln C\left(m-at\right)^2$ donc

$$v_g\left(t\right)=C\left(m-at\right)^2$$

   On propose une solution particulière de $\left(E\right)$ sous la forme $v_p\left(t\right)=C\left(t\right)\left(m-at\right)^2$:

   $\dfrac{dv_p}{dt}=\dfrac{dC}{dt}\left(m-at\right)^2-2aC\left(m-at\right)$

   $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{2a}{m-at}v=g\Longrightarrow\dfrac{dC}{dt}\left(m-at\right)^2-2aC\left(m-at\right)+\dfrac{2aC\left(m-at\right)^2}{m-at}=g$

   $\dfrac{dC}{dt}=\dfrac{g}{m-at}\Longrightarrow C\left(t\right)=\displaystyle\int\frac{g}{\left(m-at\right)^2}dt=\frac{g}{a\left(m-at\right)}$

   $v_p\left(t\right)=C\left(t\right)\left(m-at\right)^2=\dfrac{g}{a\left(m-at\right)}\left(m-at\right)^2=\dfrac{g}{a}\left(m-at\right)$

$v(t) = v_g + v_p \Longrightarrow$ la loi générale de la vitesse :

$$v(t) = C(m-at)^2 + \frac{g}{a}(m-at)$$

3. Pour $t = 0$: $v(0) = Cm^2 + \frac{g}{a}m = 0 \Longrightarrow C = -\frac{g}{ma}$ alors :
   $v(t) = -\frac{g}{ma}(m-at)^2 + \frac{g}{a}(m-at) = \frac{g}{a}(m-at)\left(1 - 1 + \frac{a}{m}t\right)$ ou bien
   $$v(t) = \frac{g}{m}t(m-at) = \frac{g}{m}\left(mt - at^2\right)$$
4. $v = \frac{dz}{dt}$ donc $z(t) = \int v dt = \frac{g}{m}\int\left(mt - at^2\right)dt = \frac{g}{m}\left(\frac{1}{2}mt^2 - \frac{1}{3}at^3\right) + z_0$
   $z(0) = 0 \Longrightarrow z_0 = 0$ soit alors
   $$z(t) = \frac{g}{6m}\left(3mt^2 - 2at^3\right) = \frac{g}{6m}t^2(3m - 2at)$$
5. A l'instant $t = t_1$ la masse devient la moitié de la masse initiale, c.à.d :
   $M(t_1) = m - at_1 = \frac{1}{2}m \Longrightarrow t_1 = \frac{m}{2a}$
   $v(t_1) = \frac{g}{m}t_1(m - at_1) = \frac{g}{m}\left(\frac{m}{2a}\right)\left(m - a\frac{m}{2a}\right) = \frac{mg}{4a}$
   la distance parcourue est : $z(t_1) = \frac{g}{6m}\left(\frac{m}{2a}\right)^2\left(3m - 2a\left(\frac{m}{2a}\right)\right) = \frac{gm^2}{12a^2}$
6. A l'instant $t = t_2$: $M(t_2) = m - at_2 = 0 \Longrightarrow t_2 = \frac{m}{a}$
   $v(t_2) = \frac{g}{m}\left(\frac{m}{a}\right)\left(m - a\frac{m}{a}\right) = 0$
   $z(t_2) = \frac{g}{6m}\left(\frac{m}{a}\right)^2\left(3m - 2a\left(\frac{m}{a}\right)\right) = \frac{gm^2}{6a^2}$

Exercice 8 Intégrer les équations de Bernoulli

1. $-y'\left(1 - x^2\right) - xy - xy^2 = 0$
2. $3y^2y' - ay^3 - x - 1 = 0$

Solution 8

1. $y'\left(1 - x^2\right) - xy - xy^2 = 0 \Longleftrightarrow y'\left(1 - x^2\right) - xy = xy^2$
   Divisons par y^2 :
   $$y'y^{-2}\left(1 - x^2\right) - xy^{-1} = x$$
   Posons $z = y^{-1} \Longrightarrow dz = -y^{-2}dy \Longleftrightarrow z' = y^{-2}y'$ alors l'équation s'écrit :
   $$z'\left(1 - x^2\right) - xz = x$$
   c'est une équation linéaire du premier ordre en z

ESSM :

$z'\left(1-x^2\right)-xz=0 \Longleftrightarrow \frac{z'}{z}=\frac{x}{1-x^2} \Longrightarrow \int \frac{dz}{z}=\int \frac{xdx}{1-x^2}$

$\Longrightarrow \ln z=-\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)+C=-\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)+\ln K=\ln\frac{K}{\sqrt{x^2-1}}$

$$z_1=\frac{K}{\sqrt{x^2-1}}$$

EASM :

soit $K=K(x) \Longrightarrow z=\frac{K(x)}{\sqrt{x^2-1}}$

$z'=\frac{d}{dx}\left(\frac{K(x)}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{K'\sqrt{x^2-1}-K\times\frac{1}{2}(2x)\left(x^2-1\right)^{1/2-1}}{x^2-1}$

$=\frac{1}{x^2-1}\left(K'\sqrt{x^2-1}-K\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=-\frac{-K'x^2+Kx+K'}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}=-\frac{K'\left(1-x^2\right)+Kx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$

$z'\left(1-x^2\right)-xz=x \Longrightarrow -\frac{K'\left(1-x^2\right)+Kx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}\left(1-x^2\right)-\frac{Kx}{\sqrt{x^2-1}}=x$

$\Longrightarrow -K'\sqrt{x^2-1}=x$

$K=-\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}=-\sqrt{x^2-1} \Longrightarrow z_2=\frac{K(x)}{\sqrt{x^2-1}}=-1$

$z=y^{-1}=\frac{K}{\sqrt{x^2-1}}-1=\frac{K-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \Longrightarrow$

$$y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{K-\sqrt{x^2-1}}$$

2. $3y^2y'-ay^3=x+1$
   On pose $z=y^3 \Longrightarrow z'=3y^2y'$
   l'équation devient : $z'-az=x+1$
   ESSM : $z'=az \Longrightarrow z_1=ke^{ax}$
   EASSM : $z=k(x)e^{ax} \Longrightarrow z'=k'e^{ax}+ake^{ax}$
   $z'-az=x+1 \Longrightarrow k'e^{ax}+ake^{ax}-ake^{ax}=x+1$
   $k'=(1+x)e^{-ax}$
   $k=\int(1+x)e^{-ax}dx=-\frac{1}{a^2}e^{-ax}(a+ax+1)$
   intégration par partie : $u=1+x \Longrightarrow du=dx$ et $dv=e^{-ax}dx \Longrightarrow v=-\frac{1}{a}e^{-ax}$
   $k=-\frac{1+x}{a}e^{-ax}+\frac{1}{a}\int e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}(x+1)-\frac{1}{a^2}e^{-ax}=-\frac{1}{a^2}e^{-ax}(a+ax+1)$
   $z_2=-\frac{1}{a^2}e^{-ax}(a+ax+1)e^{ax}=-\frac{1}{a^2}(ax+a+1)$
   $z=ke^{ax}-\frac{1}{a^2}(ax+a+1)$

$$y=\sqrt[3]{ke^{ax}-\frac{1}{a^2}(ax+a+1)}$$

Exercice 9 On donne l'équation différentielle

$$xy' + y = (xy)^{3/2} \tag{E}$$

1. En utilisant un changement de variable convenable, transformer cette équation en une équation différentielle linéaire que l'on va noter (F)
2. Résoudre l'équation (F) et déduire la solution générale de (E)

Solution 9

1. $xy' + y = (xy)^{3/2} \iff xy' + y = x^{3/2}y^{3/2}$
   divisons par $y^{3/2} \Longrightarrow$
   $$xy^{-3/2}y' + y^{-1/2} = x^{3/2}$$
   Posons $z = y^{-1/2}$ alors $z' = -\frac{1}{2}y^{-3/2}y' \iff y'y^{-3/2} = -2z$
   et l'équation devient :
   $$-2xz' + z = x^{3/2} \tag{F}$$
2. (F) est une équation linéaire du premier ordre en z.
   <u>*ESSM*</u>:
   $-2xz' + z = 0 \Longrightarrow 2x\frac{dz}{dx} = z \rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{2x}$
   En intégrant les deux membres on trouve :
   $\ln z = \frac{1}{2}\ln x + c \Longrightarrow z_1 = k\sqrt{x}$
   <u>*EASM*</u>:
   On propose une solution de la forme $z_2 = k(x)\sqrt{x}$
   $z_2 = k(x)\sqrt{x} \Longrightarrow z_2' = k'\sqrt{x} + \frac{k}{2\sqrt{x}}$
   Substituons dans l'EASM (F) :
   $-2xz' + z = x^{3/2} \Longrightarrow -2x\left(k'\sqrt{x} + \frac{k}{2\sqrt{x}}\right) + k\sqrt{x} = x\sqrt{x}$
   $\Longrightarrow -2k' = 1 \Longrightarrow k(x) = -\frac{x}{2} \Longrightarrow z_2 = -\frac{x\sqrt{x}}{2}$
   La solution générale de l'équation (F) est
   $$z(x) = k\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{2}$$
   Or $z = \frac{1}{\sqrt{y}} \Longrightarrow y(x) = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{\left(k\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{2}\right)^2}$ soit
   $$y(x) = \frac{4}{x(x-2k)^2}$$

Exercice 10 Intégrer les équations différentielles du deuxième ordre

1. $(1-x^2)\,y'' - xy' = 0$
2. $y'' - 4y = 0$
3. $y'' + 6y' + 20y = 0$
4. $y'' + 3y' - 4y = 0$
5. $y'' - 4y' + 2y = 4$
6. $y'' - 2y' + y = e^x$
7. $y'' + y = \cos 3x$
8. $y'' - 4y' + 3y = 6x + 1$
9. $y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x$
10. $y'' + 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$
11. $y'' - y' - 2y = e^{2x}$
12. $y'' - 2y' + (1+m^2)\,y = (1+4m^2)\cos mx$
13. $y'' + y' - 6y = 2e^{3x}$
14. $y'' - 3y' + 2y = (1-2x)\,e^x$

Solution 10

1. $(1-x^2)\,y'' - xy' = 0$

   Soit $z = y' \Longrightarrow z' = y'' \Longrightarrow (1-x^2)\,y'' - xy' = (1-x^2)\,z' - xz = 0$

   $(1-x^2)\,\dfrac{dz}{dx} = xz \Longrightarrow \dfrac{dz}{z} = \dfrac{x}{1-x^2}dx$

   $\int \dfrac{x}{1-x^2}dx = -\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$

   $\Longrightarrow \ln z = -\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2) + \ln k \Longrightarrow z = \dfrac{k}{\sqrt{1-x^2}}$

   $z = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{k}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow$

   $$y = \int \frac{kdx}{\sqrt{1-x^2}} = k \arcsin x$$

2. $y'' - 4y = 0$

   L'équation caractérisrique : $\lambda^2 - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 2$

   $$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

3. $y'' + 6y' + 20y = 0$

   $\lambda^2 + 6\lambda + 20 = 0$

   $\Delta = 6^2 - 4\times 20 = -44 < 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{-6 \pm 2j\sqrt{11}}{2} = -3 \pm j\sqrt{11}$

   $$y(x) = e^{-3x}\left(A\cos\sqrt{11}x + B\sin\sqrt{11}x\right)$$

4. $y'' + 3y' - 4y = 0$

   $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

   $\Delta = 9 + 16 = 25 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

   $$y(x) = Ae^{-4x} + Be^{x}$$

5. $y'' - 4y' + 2y = 4$
$y'' - 4y' + 2y = 4 \iff y'' - 4y' + 2\,(y-2) = 0$
Si on pose $z = y - 2 \Longrightarrow z' = y'$ *et* $z'' = y''$ donc $z'' - 4z' + 2z = 0$
$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \Delta = 16 - 8 = 8$
$\lambda = \dfrac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$
$$y = z + 2 = e^{2x}\left(Ae^{-\sqrt{2}x} + Be^{\sqrt{2}x}\right) + 2$$

6. $y'' - 2y' + y = e^x$
ESSM : $y'' - 2y' + y = 0$
$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 = (\lambda - 1)^2$ donc $\lambda = 1$ est une racine double
$$y_1 = (a + bx)\,e^x$$
EASM : $y'' - 2y' + y = e^x$
$f(x) = P(x)\,e^{mx} = e^x \Longrightarrow m = 1$ est une racine double et $P(x) = 1$
La solution particulière à chercher est de la forme $y_2 = Q(x)\,e^x$ avec $Q(x) = \alpha x^2$
$y_2 = \alpha x^2 e^x; y_2' = 2\alpha x e^x + \alpha x^2 e^x = \alpha\left(x^2 + 2x\right)e^x$:
$y_2'' = \alpha\,(2x+2)\,e^x + \alpha\left(x^2+2x\right)e^x = \alpha\left(x^2+4x+2\right)e^x$
$y'' - 2y' + y = e^x$
$\Longrightarrow \alpha\left(x^2+4x+2\right)e^x - 2\left(\alpha\left(x^2+2x\right)e^x\right) + \alpha x^2 e^x = e^x \Longrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$
$$y_2 = \frac{1}{2}x^2 e^x$$
Alors :
$$y = \left(a + bx + \frac{1}{2}x^2\right)e^x$$

7. $y'' + y = \cos 3x$
ESSM : $y'' + y = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm j \Longrightarrow y_1 = A\cos x + B\sin x$
EASM : $y_2 = a\cos 3x + b\sin 3x$
$y_2' = -3a\sin 3x + 3b\cos 3x$
$y_2'' = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x$
$y'' + y = \cos 3x \Longrightarrow -9a\cos 3x - 9b\sin 3x + a\cos 3x + b\sin 3x = \cos 3x$
$(-9a + a)\cos 3x + (-9b + b)\sin 3x = \cos 3x \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{8}, b = 0$
$y_2 = -\dfrac{\cos 3x}{8}$
$$y = A\cos x + B\sin x - \frac{1}{8}\cos 3x$$

8. $y'' - 4y' + 3y = 6x + 1$
ESSM : $y'' - 4y' + 3y = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$
$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$
EASM : $y'' - 4y' + 3y = 6x + 1 = f(x) = P(x)\,e^{mx} \Longrightarrow m = 0 \neq \lambda$ et $\deg P = 1$

$y_2 = (ax+b)\,;\quad y_2' = a \quad \text{et } y_2'' = 0$
$y'' - 4y' + 3y = 6x+1 \Longrightarrow -4a + 3(ax+b) = 6x+1 \Longrightarrow a = 2 \text{ et } b = 3$
$y_2 = 2x+3$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + 2x + 3$$

9. $y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x$
ESAM : $y'' + 2y' + 2y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 + 1 = 0$
$\Longrightarrow (\lambda+1)^2 = -1 = j^2 \Longrightarrow \lambda = -1 \pm j$
$y_1 = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$
EASM : $f(x) = 2x - \sin x$ on cherchera la solution sous la forme :

$$y_2 = ax + b + c\sin x + d\cos x$$

$y_2' = \dfrac{d}{dx}(ax + b + c\sin x + d\cos x) = a + c\cos x - d\sin x$
$y_2'' = \dfrac{d^2}{dx^2}(ax + b + c\sin x + d\cos x) = -d\cos x - c\sin x$
$y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x \Longrightarrow$
$(2ax + 2b + 2a) + (-d + 2c + 2d)\cos x + (-c - 2d + 2c)\sin x = 2x - \sin x$
$\Longrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 2a + 2b = 0 \\ 2c + d = 0 \\ c - 2d = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -\dfrac{1}{5} \\ d = \dfrac{1}{5} \end{cases}$
$y_2 = x - 1 - \dfrac{\sin x}{5} + \dfrac{\cos x}{5}$

$$y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + x - 1 - \frac{\sin x}{5} + \frac{\cos x}{5}$$

10. $y'' + 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$
ESSM : $y'' + 2y' + 3y = 0 \rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \Longrightarrow (\lambda+1)^2 + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \pm j\sqrt{2}$
$y_1 = e^{-x}\left(A\cos\sqrt{2}x + B\sin\sqrt{2}x\right)$
EASM : $f(x) = e^{-x}\cos x \rightarrow m = -1 + j$
$y_2 = e^{-x}(a\sin x + b\cos x)$
$y_2' = \dfrac{d}{dx}\left(e^{-x}(a\sin x + b\cos x)\right) = -e^{-x}(b\cos x - a\cos x + a\sin x + b\sin x)$
$y_2'' = \dfrac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}(a\sin x + b\cos x)\right) = -2e^{-x}(a\cos x - b\sin x)$
$y'' + 2y' + 3y = e^{-x}\cos x \Longrightarrow$
$-2(a\cos x - b\sin x) - 2((b-a)\cos x + (a+b)\sin x) + 3(a\sin x + b\cos x) = \cos x$
$\Longrightarrow a = \dfrac{1}{10} \text{ et } b = -\dfrac{1}{8}$

$$y = e^{-x}\left(A\cos\sqrt{2}x + B\sin\sqrt{2}x + \frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{8}\sin x\right)$$

11. $y'' - y' - 2y = e^{2x}$
ESSM : $y'' - y' - 2y = 0 \to \lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2 \quad \text{et } \lambda_2 = -1$
$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$
EASM : $f(x) = e^{2x} \quad m = 2 = \lambda_1$
$\Longrightarrow y_2 = axe^{2x}, y_2' = a(1+2x)e^{2x}$ et $y_2'' = 4ae^{2x}(x+1)$
$y'' - y' - 2y = e^{2x} \Longrightarrow 4ae^{2x}(x+1) - a(1+2x)e^{2x} - 2axe^{2x} = e^{2x}$
$3a = 1 \Longrightarrow y_2 = \frac{1}{3}xe^{2x}$
$$y = \left(C_1 + \frac{x}{3}\right)e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

12. $y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos mx$
ESSM :
$y'' - 2y' + (1+m^2)y = 0 \to \lambda^2 - 2\lambda + 1 + m^2 = 0$
$\Delta' = 1 - (1+m^2) = -m^2 = m^2 j^2 \Longrightarrow \lambda = 1 \pm mj$
$y_1 = e^x(A\cos mx + B\sin mx)$
EASM :
$f(x) = (1+4m^2)\cos mx$ donc mj n'est pas une racine de l'équation caractéristique
La solution particulière de l'EASM est de la forme : $a\cos mx + b\sin mx$
$y_2' = \frac{d}{dx}(a\cos mx + b\sin mx) = bm\cos mx - am\sin mx$
$y_2'' = \frac{d^2}{dx^2}(a\cos mx + b\sin mx) = -am^2\cos mx - bm^2\sin mx$
$y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos mx \Longrightarrow$
$(-am^2 - 2bm + a + am^2)\cos mx + (-bm^2 + 2am + b + bm^2)\sin x = (1+4m^2)\cos mx$
$\Longrightarrow \begin{cases} a - 2mb = 1 + 4m^2 \\ 2am + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = 1 \quad \text{et } b = -2m$
$y_2 = \cos mx - 2m\sin mx$
$$y = (Ae^x + 1)\cos mx + (Be^x - 2m)\sin mx$$

13. $y'' + y' - 6y = 2e^{3x}$
ESSM :
$y'' + y' - 6y = 0 \to \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \to \lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 2$
$y_1 = Ae^{-3x} + Be^{2x}$
EASM :
$f(x) = 2e^{3x} = P(x)e^{mx} \quad m = 3 \neq \lambda \Longrightarrow y_2 = ae^{3x} \Longrightarrow y_2' = 3ae^{3x}$ et $y_2'' = 9ae^{3x}$
$y'' + y' - 6y = 2e^{3x} \Longrightarrow (9a + 3a - 6a)e^{3x} = 2e^{3x} \Longrightarrow a = \frac{1}{3}$
$y_2 = \frac{1}{3}e^{3x}$ et finalement :
$$y = Ae^{-3x} + Be^{2x} + \frac{1}{3}e^{3x}$$

14. $y'' - 3y' + 2y = (1-2x)e^x$
ESSM :
$y'' - 3y' + 2y = 0 \to \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1 \quad \text{et } \lambda_2 = 2$
$y_1 = Ae^x + Be^{2x}$

EASM :
$f(x) = (1-2x)e^x;\ m = 1 = \lambda_1$ donc $y_2 = \left(ax^2 + bx\right)e^x$
$y_2' = e^x\left(b + ax^2 + 2ax + bx\right)$
$y_2'' = e^x\left(2a + 2b + ax^2 + 4ax + bx\right)$
$y'' - 3y' + 2y = (1-2x)e^x \Longrightarrow$
$(a - 3a + 2a)x^2 + (4a + b - 6a - 3b + 2b)x + 2a + 2b - 3b = 1 - 2x$
$\Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Longrightarrow y_2 = \left(x^2 + x\right)e^x$

$$y = \left(x^2 + x + A\right)e^x + Be^{2x}$$

Exercice 11 Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel ; $n \neq 1$.
On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = ay + by^n \tag{E}$$

On se propose dans cet exercice de rechercher les solutions strictement positifs de (E) dans $\mathbb{R}$.

1. On pose sur $\mathbb{R}$: $z = y^{1-n}$. Déterminer une équation différentielle satifaite par z et la résoudre
2. En déduire les solutions strictement positifs de (E) sur $\mathbb{R}$
3. Que donne le cas $n = 0$?

Solution 11

$n \neq 1$

$$y' = ay + by^n \tag{E}$$

1. $z = y^{1-n} \Longrightarrow z' = \dfrac{dz}{dx} = (1-n)\,y'y^{-n}$
   $y' = ay + by^n \Longrightarrow y'y^{-n} = ay^{1-n} + b$
   Don c on a $z' = (1-n)\left(ay^{1-n} + b\right)$ et on a $z = y^{1-n}$ on trouve :
   $$z' = (1-n)(az + b)$$
2. Soit $u = az + b \Longrightarrow u' = az' \Longrightarrow \dfrac{u'}{a} = (1-n)\,u \Longrightarrow \dfrac{du}{u} = a(1-n)\,dx$
   $u = C\exp(a(1-n)x) \Longrightarrow z = K\exp(a(1-n)x) - \dfrac{b}{a} \Longrightarrow$
   $$y(x) = \left(K\exp(a(1-n)x) - \frac{b}{a}\right)^{\dfrac{1}{1-n}}$$
3. Pour $n = 0$ on aura une équation linéaire $y' = ay + b \Longrightarrow y(x) = C\exp(ax) - \dfrac{b}{a}$

Exercice 12 La température instantanée $\theta(t)$ d'un objet vérifie la loi de Newton

$$\frac{d\theta}{dt} = k(T - \theta) \qquad \text{(E)}$$

où T est la température ambiante et k une constante. Le temps t est exprimé en minutes

1. Résoudre l'équation (E) pour déterminer la température instantanée $\theta(t)$. Sachant qu'un objet à la température initiale $\theta_0 = 70\,°\text{C}$ est placé dans une salle où la température ambiante est $T = 20\,°\text{C}$, déterminer une solution particulière.
2. Exprimer la constante k en fonction de θ et t.
3. Calculer la valeur numérique de la constante k sachant que la température de l'objet devient $50\,°\text{C}$ après $2\,\text{min}$.
4. A quel instant la température devient $25\,°\text{C}$.

Solution 12

$$\frac{d\theta}{dt} = k(T - \theta) \qquad (E)$$

1. On a T est constante, alors en séparant les variables, l'équation (E) ,s'écrit

$$\frac{d\theta}{\theta - T} = -kdt$$

Intégrons les deux membres :
$\int \frac{d\theta}{\theta - T} = -\int kdt \Longleftrightarrow \ln(\theta - T) = -kt + C = -kt + \ln A = \ln Ae^{-kt}$
Ou bien :

$$\theta(t) = T + Ae^{-kt}$$

Pour $t = 0 : \theta = \theta_0 \Longleftrightarrow \theta_0 = T + A \Longrightarrow A = \theta_0 - T$

$$\theta(t) = T + (\theta_0 - T)\, e^{-kt}$$

on a $\theta_0 = 70\,°\text{C}$ et $T = 20\,°\text{C}$ donc :

$$\theta(t) = 20 + 50e^{-kt}$$

2. $\theta(t) = 20 + 50e^{-kt} \Longrightarrow$
$e^{-kt} = \frac{\theta - 20}{50} \Longrightarrow -kt = \ln\left(\frac{\theta - 20}{50}\right) \Longrightarrow$

$$k = \frac{1}{t}\ln\frac{50}{\theta - 20}$$

3. $k = \frac{1}{t}\ln\frac{50}{\theta - 20} = \frac{1}{2}\ln\frac{50}{50 - 20} = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3} = 0.255$
4. $t = \frac{1}{k}\ln\frac{50}{\theta - 20} = \frac{1}{0.255}\ln\frac{50}{25 - 20} = 3.9216\ln 10 = 9.0298\,\text{min}$

Exercice 13 Considèrons l'équation différentielle :

$$y'' \cos x + y' \sin x = y \cos^3 x \tag{E1}$$

En posant $t = \sin x$, ramener l'équation $(E1)$ à une équation à coefficients constants et l'intégrer.

Solution 13

Soit $t = t(x) = \sin x \Longrightarrow x = x(t) = \arcsin t$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cos x$

$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dt}\cos x\right) = -\sin x\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)\cos x$

$= -\sin x\dfrac{dy}{dt} + \cos x\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{dt}{dx}\right) = -\dfrac{dy}{dt}\sin x + \dfrac{d^2y}{dt^2}\cos^2 x$

Remplaçons dans l'équation (E) :

$\left(-\dfrac{dy}{dt}\sin x + \dfrac{d^2y}{dt^2}\cos^2 x\right)\cos x + \left(\dfrac{dy}{dt}\cos x\right)\sin x = y\cos^3 x$

$\Longrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2}\cos^3 x - \dfrac{dy}{dt}\sin x\cos x + \dfrac{dy}{dt}\cos x\sin x = y\cos^3 x$

$\Longrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2}\cos^3 x = y\cos^3 x \Longrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} = y$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

L'équation caractéristique : $\lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 1 \Longrightarrow y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$

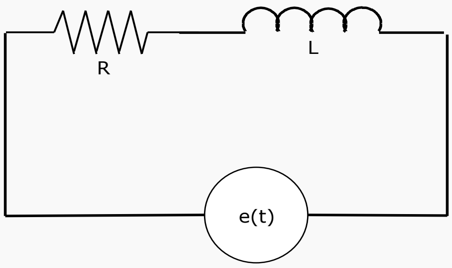
$$y(x) = C_1 e^{\sin x} + C_2 e^{-\sin x}$$

Exercice 14 On considère un circuit R, L auquel on applique une f.e.m $e(t)$; pour $t > 0$

1. Ecrire l'équation différentielle (D) qui régit le circuit
2. Déterminer l'intensité du courant $i(t)$ vérifiant l'équation (D) si $e(t) = 2$
3. Résoudre l'équation (D) dans le cas où $e(t) = a\sin\omega t$ où a et ω sont constantes

Solution 14

1. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = e(t)$



2. $e(t) = 2 \Longrightarrow L\dfrac{di}{dt} + Ri = 2$

$\text{ESSM} : L\dfrac{di}{dt} + Ri = 0$

$L\dfrac{di}{dt} = -Ri \Longrightarrow L\dfrac{di}{i} = -Rdt$

$\ln i = -\dfrac{R}{L}t + C \Longrightarrow i_1(t) = K\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right)$

$\text{EASM : on suppose } K = K(t)$

$\dfrac{di}{dt} = K'\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right) - \dfrac{KR}{L}\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right)$

$L\dfrac{di}{dt} + Ri = 2 \Longrightarrow LK'\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right) - KR\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right) + KR\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right) = 2$

$LK'\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right) = 2 \Longrightarrow K' = \dfrac{2}{L}\exp\left(\dfrac{R}{L}t\right)$

$\Longrightarrow K = \dfrac{2}{L}\left(\dfrac{L}{R}\right)\exp\left(\dfrac{R}{L}t\right) = \dfrac{2}{R}\exp\left(\dfrac{R}{L}t\right)$

$i_2 = \dfrac{2}{R}\exp\left(\dfrac{R}{L}t\right)\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right) = \dfrac{2}{R}$

$$i(t) = K\exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \frac{2}{R}$$

3. $e(t) = a\sin\omega t \Longrightarrow L\dfrac{di}{dt} + Ri = a\sin\omega t$

$\text{ESSM} : L\dfrac{di}{dt} + Ri = 0 \Longrightarrow i_1(t) = K\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right)$

$\text{EASM : on suppose } K = K(t)$

$\dfrac{di}{dt} = K'\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right) - \dfrac{KR}{L}\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right)$

$L\dfrac{di}{dt} + Ri = a\sin\omega t$

$\Longrightarrow LK'\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right) - KR\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right) + KR\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right) = a\sin\omega t$

$LK'\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right) = a\sin\omega t$

$K' = \dfrac{a}{L}\exp\left(\dfrac{R}{L}t\right)\sin\omega t$

$K = \dfrac{a}{L}\displaystyle\int \exp\left(\dfrac{R}{L}t\right)\sin\omega t dt = a\dfrac{R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t}{L^2\omega^2 + R^2}\exp\left(\dfrac{Rt}{L}\right)$

$i_2 = a\dfrac{R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t}{L^2\omega^2 + R^2}\exp\left(\dfrac{Rt}{L}\right) \times \exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right) = a\dfrac{R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t}{L^2\omega^2 + R^2}$

$$i(t) = K\exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + a\frac{R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t}{L^2\omega^2 + R^2}$$

Exercice 15 On considère l'équation différentielle

$$2xy' + y = 3x + 1 \tag{E$_1$}$$

1. Déterminer une solution particulière de (E_1) de la forme $y_1(x) = ax + b$.
2. Donner la solution générale de l'équation homogène :

$$2xy' + y = 0 \tag{H}$$

   sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
3. Déduire de ce qui précède la solution générale de l'équation (E_1) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

Solution 15

1. $y_1(x) = ax + b \Longrightarrow y_1' = a$
   $2xy'(x) + y(x) = 3x + 1 \Longrightarrow 2x(a) + ax + b = 3x + 1 \Longrightarrow a = b = 1$

$$y_1 = x + 1$$

2. $2x\dfrac{dy}{dx} + y = 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{2x} \Longrightarrow \ln y = -\dfrac{1}{2}\ln x + C$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$

$$y_2(x) = \frac{k}{\sqrt{|x|}}$$

3. $y(x) = \dfrac{k}{\sqrt{|x|}} + x + 1$

Exercice 16 Le mouvement d'une masse ponctuelle m sous l'action d'une force F est définie par l'équation différentielle

$$mx'' + kx' + \beta x = F \tag{E2}$$

1. Déterminer l'expression générale de l'élongation $x = x(t)$ si $F =$ constante
2. Pour le mouvement harmonique $k = 0$. Résoudre $(E2)$ avec $F = m\sin t$.
3. Résoudre $(E2)$ si $m = 1, \beta = 2$ et $k = 2$ et $F = m\sin t$

Solution 16

Le mouvement d'une masse ponctuelle m sous l'acrion d'une force F est définie par l'équation différentielle

$$mx'' + kx' + \beta x = F \tag{E}$$

1. $F =$constante
   ESSM : $mx'' + kx' + \beta x = 0$
   Equation caractéristique : $m\lambda^2 + k\lambda + \beta = 0 \Longrightarrow \Delta = k^2 - 4m\beta$

(a) si $\Delta > 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-k+\sqrt{k^2-4m\beta}}{2m} \\ \lambda_1 = \dfrac{-k-\sqrt{k^2-4m\beta}}{2m} \end{cases}$

$$x_1(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \tag{a}$$

(b) si $\Delta = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{-k}{2m} \Longrightarrow$

$$x(t) = (Ax+B)\,e^{\lambda t} \tag{b}$$

(c) si $\Delta < 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-k+j\sqrt{4m\beta-k^2}}{2m} = \alpha + j\omega \\ \lambda_1 = \dfrac{-k-\sqrt{4m\beta-k^2}}{2m} = \alpha - j\omega \end{cases}$

$$x_1(t) = e^{\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \tag{c}$$

La solution particulière est de même forme que $f(t) = F$ donc c'est une constante alors $x_2 = \dfrac{F}{\beta}$

2. Pour le mouvement harmonique $k = 0$.
$mx'' + \beta x = m\sin t$
ESSM : $mx'' + \beta x = 0 \to m\lambda^2 + \beta = 0 \Longrightarrow \lambda^2 = -\dfrac{\beta}{m}$
βx est la force de rappelle donc $\beta > 0$, soit $\omega^2 = \dfrac{\beta}{m}$ on trouve $\lambda = \pm j\omega$ donc la solution est

$$x_1(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

La solution particulière à chercher est de la forme $x_2 = a\cos t + b\sin t$
$x_2' = \dfrac{d}{dt}(a\cos t + b\sin t) = -a\sin t + b\cos t$
$x_2'' = \dfrac{d^2}{dt^2}(a\cos t + b\sin t) = -a\cos t - b\sin t$
$mx'' + \beta x = m\sin t$
$\Longrightarrow -am\cos t - bm\sin t + a\beta\cos t + b\beta\sin t = m\sin t$
$\Longrightarrow a(\beta - m)\cos t + (\beta - m)\,b\sin t = m\sin t$

$\beta \neq m$ donc $a = 0$ et $b = \dfrac{m}{\beta - m}$

$x_2 = \dfrac{m}{\beta - m}\sin t$

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{m}{\beta - m}\sin t$$

3. $m = 1, \beta = 2$ et $k = 2$ et $F = m\sin t$
$x'' + 2x' + 2x = \sin t$
ESSM : $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda+1)^2 + 1 = 0 \Longrightarrow (\lambda+1)^2 = -1 = j^2$
$\Longrightarrow \lambda = 1 = \pm j \Longrightarrow \lambda = -1 \pm j$

$$x_1(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t)$$

EASM : la solution particulière à chercher est de la forme : $x_1(t) = a\sin t + b\cos t$
$x_1' = a\cos t - b\sin t \quad$ et $x_1'' = -a\sin t - b\cos t$
$x'' + 2x' + 2x = \sin t \Longrightarrow$
$-a\sin t - b\cos t + 2(a\cos t - b\sin t) + 2(a\sin t + b\cos t) = \sin t$
$(a-2b)\sin t + (2a+b)\cos t = \sin t \Longrightarrow \begin{cases} a - 2b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = \frac{1}{5}, b = -\frac{2}{5}$
alors $x_1 = \frac{1}{5}\sin t - \frac{2}{5}\cos t$
et la solution générale de l'équation complète :

$$x(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t) + \frac{1}{5}\sin t - \frac{2}{5}\cos t$$

Exercice 17 Un objet de masse m, initialement au repos, tombe en chute dont la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse de l'objet. Si $x(t)$ est la distance traversée, alors sa vitesse est $v = x'(t)$ et $a = v'(t)$ son accélération. Si on désigne par g l'accéleration de pesenteur alors l'objet est soumis à la force : $mg - kv$,où k est une constante positive. La deuxième loi de Newton nous donne alors

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

1. Résoudre cet équation et montrer que

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right)$$

2. Quelle est la vitesse limite de l'objet
3. Trouver la distance traversée après t secondes

Solution 17

1. L'équation s'écrit : $m\frac{dv}{dt} + kv = mg$ ou bien $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$
$\Longrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v - g = 0 \Longrightarrow$
Posons $y = \frac{k}{m}v - g \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{k}{m}\frac{dv}{dt} \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{m}{k}\frac{dy}{dt}$ d'où : $\frac{m}{k}\frac{dy}{dt} + y = 0$
$\Longrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{k}{m}dt \Longrightarrow y = \frac{k}{m}v - g = C\exp\left(-\frac{kt}{m}\right)$
$\Longrightarrow v(t) = \frac{mC}{k}\exp\left(-\frac{kt}{m}\right) + \frac{mg}{k}$
mais la masse m est initialement au repos c'est-à-dire $v(0) = 0$
$\Longrightarrow C = -g$ et finalemet

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right)$$

2. si $t \to +\infty$: $\exp\left(-\frac{kt}{m}\right) \to 0$ alors $v \to \frac{mg}{k}$
3. $x(t) = \int v(t)\,dt = \int \frac{mg}{k}\left(1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right) dt$
$= \frac{mg}{k}\left(\frac{m}{k}\exp\left(-\frac{kt}{m}\right) + t\right) + C_1$
Or $x(0) = 0 \Longrightarrow \frac{gm^2}{k^2} + C_1 = 0 \Longrightarrow C_1 = -\frac{gm^2}{k^2}$
$x(t) = \frac{mg}{k}\left(\frac{m}{k}\exp\left(-\frac{kt}{m}\right) + t\right) - \frac{gm^2}{k^2}$

Exercice 18 Le mouvement oscillatoire du point M mobile sur l'axe $x'Ox$,sous l'action d'une force $F(t)$ est définie par l'équation différentielle :

$$x'' + 2ax' + (a-2)^2 x = F(t)$$

où $x = x(t)$ et $x' = v(t)$ la vitesse et a est un paramètre ; $a \geq 0$.

1. Etudier le mouvement si $F(t) = 0$ dans les deux cas suivants
   (a) $a = 0, x(0) = 1$ et $v(0) = 2\sqrt{3}$.
      i. Trouver l'amplitude et la période.
   (b) $\alpha = x(0) = v(0) = 1$
2. Quelle est la solution si $a = 1$ et $F(t) = e^{-2t}$

Solution 18

1. $F(t) = 0$
   (a) $a = 0, x(0) = 1$ **et** $v(0) = 2\sqrt{3} \Longrightarrow x'' + 4x = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 2j$
   $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$
   $x(0) = A = 1$
   $v(t) = x'(t) = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t \Longrightarrow v(0) = 2B = 2\sqrt{3} \Longrightarrow B = \sqrt{3}$

$$x(t) = \cos 2t + \sqrt{3}\sin 2t$$

on écrit $x(t)$ sous la forme : $x(t) = E\cos(\omega t - \varphi)$ avec$E = \sqrt{A^2 + B^2} = 2$ et $\varphi = \arctan\frac{B}{A} = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ et on a

$$\omega = 2x(t) = 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$$

   i. amplitude $= E = 2$
   période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$

(b) Pour $a = x(0) = v(0) = 1$ l'équation sera : $x'' + 2x' + x = 0$
Eqt. caractéristique : $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$ une racine double.

$$x(t) = (\alpha t + \beta)\, e^{-t}$$

$x(0) = \beta = 1$
$x'(t) = \alpha e^{-t} - (\alpha t + \beta)\, e^{-t} \Longrightarrow x'(0) = \alpha - \beta = 1 \Longrightarrow \alpha = 2$

$$x(t) = (2t + 1)\, e^{-t}$$

2. Pour $a = 1$ et $F(t) = e^{-2t}$ l'équation s'écrit :

$$x'' + 2x' + x = e^{-2t}$$

La solution générale est : $x = x_g + x_p$ où $x_g = (\alpha t + \beta)\, e^{-t}$ est la solution générale de l'ESSM et x_p est une solution particulière de l'EASM, cette solution est de la forme $x_p = ce^{-2t}$ comme $\lambda \neq -2$
$x'_p = -2ce^{-2t}$ et $x''_p = 4ce^{-2t}$
$x'' + 2x' + x = e^{-2t} \Longrightarrow (4c - 4c + c)\, e^{-2t} = e^{-2t} \Longrightarrow c = 1$ et donc $x_p = e^{-2t}$.

$$x(t) = (\alpha t + \beta)\, e^{-t} + e^{-2t}$$

Exercice 19 On considère l'équation différentielle du second ordre (E) suivante :

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 \ln x \qquad x > 0 \tag{E}$$

où $y = y(x)$

1. On pose $x = e^t$.

   (a) Exprimer $y'(t) = \dfrac{dy}{dt}$ et puis $y''(t) = \dfrac{d^2y}{dt^2}$ en fonction de x, $y'(x)$ et de $x, y'(x)$, et $y''(x)$ respectivement.

   (b) Montrer que (E) est équivalente à l'équation.

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y = te^{2t} \tag{F}$$

2. Donner la solution générale de l'équation (F).
3. Déduire la solution particulière de (E) dont la courbe intégrale passe par le point $(1, 0)$ et telle que $y'(1) = 1$.

Solution 19

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 \ln x \qquad x > 0 \tag{E}$$

1. $x = e^t$.

(a) $y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = e^t\frac{dy}{dx} = xy'(x)$

$y''(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(e^t\frac{dy}{dx}\right) = e^t\frac{dy}{dx} + e^t\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

$= e^t\frac{dy}{dx} + e^t\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dt} = e^t\frac{dy}{dx} + e^{2t}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = xy'(x) + x^2y''(x)$

$\Longrightarrow x^2y''(x) = y''(t) - xy'(x) = y''(t) - y'(t)$

(b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2\ln x$

$\Longleftrightarrow (y''(t) - y'(t)) - 2y'(t) + 2y(t) = (e^t)^2\ln e^t$

donc

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y = te^{2t} \qquad \text{(F)}$$

2. ESSM : $y''(t) - 3y'(t) + 2y = 0$
Eq. Caractéristique : $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1$ ou $\lambda_2 = 2$

$$y_1(t) = C_1e^t + C_2e^{2t}$$

EASM : $y''(t) - 3y'(t) + 2y = te^{2t}$

Le second membre est de la forme : $P(t)e^{at}$ avec $P(t) = t$ et $a = 2 = \lambda_2$

$y_2(t) = (\alpha t^2 + \beta t)e^{2t}$

$y_2' = (2\alpha t + \beta)e^{2t} + 2(\alpha t^2 + \beta t)e^{2t} = (2\alpha t + \beta)e^{2t} + 2y_2$

$= (2\alpha t^2 + 2(\alpha + \beta)t + \beta)e^{2t}$

$y_2'' = 2(2\alpha t^2 + 2(\alpha + \beta)t + \beta)e^{2t} + (4\alpha t + 2(\alpha + \beta))e^{2t}$

$= (4\alpha t^2 + (8\alpha + 4\beta)t + 2\alpha + 4\beta)e^{2t}$

$y''(t) - 3y'(t) + 2y = te^{2t}$

$\Longrightarrow 4\alpha t^2 + (8\alpha + 4\beta)t + 2\alpha + 4\beta - 3(2\alpha t^2 + 2(\alpha + \beta)t + \beta) + 2(\alpha t^2 + \beta t) = t$

$(8\alpha + 4\beta - 6\alpha - 6\beta + 2\beta)t + 2\alpha + 4\beta - 3\beta = t$

$2\alpha = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

$2\alpha + \beta = 0 \Longrightarrow \beta = -2\alpha = -1$

$y_2(t) = \left(\frac{t^2}{2} - t\right)e^{2t}$

$y(t) = C_1e^t + \left(\frac{t^2}{2} - t + C_2\right)e^{2t}$

On a $x = e^t \Longrightarrow t = \ln x \ (x > 0)$ alors

$$y(x) = C_1x + \left(\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + C_2\right)x^2$$

3. $y(x) = 2x^2 - 2x + x^2\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x$