Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Dérivée, différentielle et Développement limité

Exercice 1 Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en $x = 0$
2. Trouver $f'(x)$ si $x \neq 0$
3. Etudier la continuité de $f'(x)$ en $x = 0$

Solution 1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$

   car on a : $-1 \leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$ et $-x \leq x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq x$

   Par suite f est dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 0$
2. pour $x \neq 0$ on a $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

   $\Longrightarrow f'(x) = \left(x^2 \sin\dfrac{1}{x}\right)' = 2x \sin\dfrac{1}{x} + x^2\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\cos\dfrac{1}{x} = 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$

   $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$
3. $f'(x)$ est continue au point $x = 0$ si $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$

   On a :

   $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}\right)$

   $= 2 \lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin\dfrac{1}{x}\right) - \lim\limits_{x \to 0} \cos\dfrac{1}{x} = 0 - \lim\limits_{x \to 0} \cos\dfrac{1}{x}$

   Cette dernière limite n'existe pas donc $f'(x)$ n'est pas continue au point $x = 0$

Exercice 2 En utilisant la définition, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = \sqrt{x}$
4. $f(x) = 2x^2 - x$
5. $f(x) = \sin 2$
6. $f(x) = \ln(x)$

Solution 2

1. $f(x) = x^3 : f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + h^3 + 3hx^2 + 3h^2x - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 3hx\right) = 3x^2$$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x} : f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{-x-h+x}{(x+h)\,x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{x\,(x+h)} = -\dfrac{1}{x^2}$

3. $f(x) = \sqrt{x} : f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4. $f(x) = 2x^2 - x : f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(x+h)^2 - (x+h) - 2x^2 + x}{h}$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 2h^2 + 4hx - (x+h) - 2x^2 + x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h^2 + 4hx - h}{h} = \lim_{h\to 0} (2h + 4x - 1) = 4x - 1$$

5. $f(x) = \sin 2x : f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin 2(x+h) - \sin 2x}{h}$
$$\sin\varphi - \sin\theta = 2\sin\frac{\varphi - \theta}{2}\cos\frac{\varphi + \theta}{2}$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(2\sin\frac{2x + 2h - 2x}{2}\cos\frac{2x + 2h + 2x}{2}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{2\sin h\cos(2x+h)}{h}\right) = 2\cos 2x$$

6. $f(x) = \ln(x) : f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}$$

Exercice 3 Trouver les angles formés par l'axe Ox et les tangentes aux courbes des fonctions suivantes aux points indiqués :

1. $y = x^2 \quad x_0 = 1 \quad x_1 = -1$
2. $y = \dfrac{1}{x} \quad x_0 = 1 \quad x_1 = 0$
3. $y = \sqrt{x} \quad x_0 = 1 \quad x_1 = 2$
4. $y = \sin x \quad x_0 = \pi/2 \quad x_1 = 0$

Solution 3

L'angle formé par l'axe Ox et la tangente sur la courbe de la fonction $f(x)$ au point x_0 est α tel que $\tan\alpha = f'(x_0)$

1. $y = x^2 \quad x_0 = 1 \quad x_1 = -1$

$$f'(x) = 2x : \begin{cases} f'(1) = 2 \Longrightarrow \alpha_0 = \arctan(2) \\ f'(-1) = -2 \Longrightarrow \alpha_1 = -\arctan(2) \end{cases}$$

2. $y = \dfrac{1}{x} \quad x_0 = 1 \quad x_1 = 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} : \begin{cases} f'(1) = -1 = \tan\alpha \Longrightarrow \alpha = \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4} \\ f'(0) = -\infty = \tan\alpha \Longrightarrow \alpha = \arctan(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

3. $y = \sqrt{x} \quad x_0 = 1 \quad x_1 = 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} : \begin{cases} f'(1) = \dfrac{1}{2} = \tan\alpha \\ f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

4. $y = \sin x \quad x_0 = \pi/2 \quad x_1 = 0$

$$f'(x) = \cos x : \begin{cases} f'(\pi/2) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \\ f'(0) = 1 \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Exercice 4 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{x^5 + 2x}{x - 1}$
2. $\dfrac{\sin x}{x}$
3. $\sqrt{x + \sqrt{x}}$
4. $\sin \sqrt[3]{x^2}$
5. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
6. $\tan(\ln(x))$
7. $\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
8. $\cos\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$
9. $\sin 3x \cos 5x^2$
10. $\dfrac{1}{3}\tan^3 x - \tan x$
11. $\ln(\cos x)$
12. $\tan(e^x + \sin x)$

Solution 4

1. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^5 + 2x}{x - 1}\right) = \dfrac{4x^5 - 5x^4 - 2}{(x-1)^2}$
2. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$
3. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right) = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}$
4. $\dfrac{d}{dx}\left(\sin \sqrt[3]{x^2}\right) = \dfrac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x}\left(\cos \sqrt[3]{x^2}\right)$
5. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

6. $\dfrac{d}{dx}\left(\tan\left(\ln\left(x\right)\right)\right) = \dfrac{1+\tan^2\left(\ln x\right)}{x}$
7. $\dfrac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right) = \dfrac{1}{1-x^2}$
8. $\dfrac{d}{dx}\left(\cos\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)\right) = \dfrac{\ln x-1}{x^2}\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\ln x\right)\right)$
9. $\dfrac{d}{dx}\left(\sin 3x\cos 5x^2\right) = 3\cos x\cos 5x^2 - 10x\sin 3x\sin 5x^2$
10. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{3}\tan^3 x - \tan x\right) = \tan^4 x - 1$
11. $\dfrac{d}{dx}\left(\ln\left(\cos x\right)\right) = -\tan x$
12. $\dfrac{d}{dx}\left(\tan\left(e^x+\sin x\right)\right) = \left(\tan^2\left(e^x+\sin x\right)+1\right)\left(\cos x + e^x\right)$

Exercice 5 Soient $u\left(x\right)$ et $v\left(x\right)$ sont deux fonctions de la variable x.

1. Si $y = u^v$. Calculer $\ln y$, $\left(\ln y\right)'$ et démontrer que :
$$y' = vu'u^{v-1} + u^v v'\ln u$$
2. Si $y = e^u$. Démontrer que : $y' = u'e^u$

Solution 5

1. $y = u^v \Longrightarrow \ln y = v\ln u \Longrightarrow \left(\ln y\right)' = v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}$
$\left(\ln y\right)' = \dfrac{y'}{y} \Longrightarrow y' = y\left(\ln y\right)' = u^v\left(v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}\right) = vu'u^{v-1} + u^v v'\ln u$
2. $y = e^u \Longrightarrow \ln y = u \Longrightarrow \left(\ln y\right)' = \dfrac{y'}{y} = u' \Longrightarrow y' = u'y = u'e^u$

Exercice 6 Calculer les dérivées des fonctions suivantes

1. $e^{\sin x}$
2. x^x
3. $\exp\left(x^x\right)$
4. $x^{\ln x}$
5. $\left(\sin x\right)^{\sin x}$
6. $\left(\dfrac{x}{n}\right)^{\dfrac{x}{n}}$
7. $10^{x\tan x}$
8. $\sin\left(\sqrt{1-2^x}\right)$
9. $a^{x\log x}$

Solution 6

En utilisant la formule : $y' = vu'u^{v-1} + u^v v' \ln u$ on trouve :

1. $\dfrac{d}{dx}\left(e^{\sin x} \right) = (\cos x)\, e^{\sin x}$, dans ce cas $u = e = Ct^e$
2. $\dfrac{d}{dx}\left(x^x \right) = x^x (\ln x + 1)$
3. $\dfrac{d}{dx}(\exp(x^x)) = x^x (\ln x + 1) \exp(x^x)$
4. $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\ln x}\right) = 2x^{\ln x - 1} \ln x$
5. $\dfrac{d}{dx}\left((\sin x)^{\sin x}\right) = \left((\sin x)^{\sin x}\right) (\ln(\sin x) + 1) \cos x$
6. $\dfrac{d}{dx}\left(\left(\dfrac{x}{n}\right)^{\dfrac{x}{n}}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{n}\right)^{\dfrac{x}{n}}\left(\ln\dfrac{x}{n} + 1\right)$
7. $\dfrac{d}{dx}\left(10^{x\tan x}\right) = (\ln 10)\, 10^{x \tan x}\left(x\tan^2 x + \tan x + x\right)$
8. $\dfrac{d}{dx}\left(\sin\left(\sqrt{1-2^x}\right)\right) = -\dfrac{\ln 2}{2}\dfrac{2^x}{\sqrt{1-2^x}}\left(\cos\sqrt{1-2^x}\right)$
9. $\dfrac{d}{dx}\left(a^{x\log x}\right) = (\ln a)(\ln x + 1)\, a^{x \ln x}$

Exercice 7 Démontrer les formules des dérivées des fonctions trigonométriques inverses :

1. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Solution 7

1. $y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$

   $dx = \cos y dy = \sqrt{1-\sin^2 y} dy = \sqrt{1-x^2} dy \Longrightarrow y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   Si $y = \arcsin f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
2. $y = \arccos x \Rightarrow x = \cos y$

   $dx = -\sin y dy = -\sqrt{1-\cos^2 y} dy = -\sqrt{1-x^2} dy \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   Si $y = \arccos f(x) \Rightarrow y' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$

3. $y = \arctan x \Rightarrow x = \tan y$

$$dx = \left(1 + \tan^2 y\right) dy = \left(1 + x^2\right) dy \Rightarrow y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

Dans le cas où $y = \arctan f(x)$ on aura $y' = \dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$

Exercice 8 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $\arcsin \dfrac{x}{a}$
2. $\arcsin \dfrac{x}{x+1}$
3. $\arctan \dfrac{x^2}{x^2+1}$
4. $\arccos e^x$
5. $\arctan \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$
6. $\dfrac{\arccos x}{x}$

Solution 8

En utilisant les fromules démontrées dans l'exercice précédent on trouve

1. $$\frac{d}{dx}\left(\arcsin \frac{x}{a}\right) = \frac{1/a}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

2. $$\frac{d}{dx}\left(\arcsin \frac{x}{x+1}\right) = \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x+1}\right)^2}} = \frac{\frac{(x+1) - x}{(x+1)^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{(x+1)^2}}}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{(x+1)^2 - x^2}{(x+1)^2}}} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$$

3. $$\frac{d}{dx}\left(\arctan \frac{x^2}{x^2+1}\right) = \frac{\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'}{1 + \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2} = \frac{\frac{2x\left(1+x^2\right) - 2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}}{1 + \frac{x^4}{\left(x^2+1\right)^2}}$$

$$= \frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{\left(x^2+1\right)^2\left(1 + \frac{x^4}{\left(x^2+1\right)^2}\right)} = \frac{2x}{2x^4 + 2x^2 + 1}$$

4. $$\frac{d}{dx}\left(\arccos e^x\right) = -\frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

5. $$\frac{d}{dx}\left(\arctan \frac{x+1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{x-1}{2\sqrt{x}\left(3x + x^2 + 1\right)}$$

6. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\arccos x}{x}\right) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{x^2}\arccos x$$

Exercice 9 Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

1. $y = \sin^2 x$
2. $y = \arctan \dfrac{x}{a}$
3. $y = \ln \dfrac{x+1}{x}$
4. $y = \sqrt[7]{x^4}$

Solution 9

La différentielle d'une fonction $f(x)$ est $df = f'(x)\,dx$

1. $y = \sin^2 x \Longrightarrow dy = 2\sin x \cos x dx = \sin 2x dx$
2. $y = \arctan \dfrac{x}{a} \Rightarrow dy = \dfrac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$
3. $y = \ln \dfrac{x+1}{x} \Rightarrow dy = \dfrac{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)'}{\dfrac{x+1}{x}} dx = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{x}{x+1} dx = -\dfrac{dx}{x^2+x}$
4. $y = \sqrt[7]{x^4} \Rightarrow dy = \dfrac{4}{7\sqrt[7]{x^3}} dx = \dfrac{4}{7x}\sqrt[7]{x^4} dx$

Exercice 10 Déterminer les équations de la tangente et de la normale au point $M_0(x_0, f(x_0))$ sur les courbes suivantes, puis déduire les longueurs de la tangente, de la sous-tangente, de la normale et celle de la sous-normale.

1. $y = x^3 - 3x^2 - x + 5;\ x_0 = 3$
2. $y = 2px^2;\ x_0 = 2$
3. $y = x \sin x;\ x_0 = \frac{\pi}{2}$
4. $y = \dfrac{1}{x};\ x_0 = 1$

Solution 10

L'équation de la tangente est : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

L'équation de la normale est : $y - f(x_0) = -\dfrac{x - x_0}{f'(x_0)}$

Longueur de la sous-tangente : $\ell_{ST} = \left|\dfrac{y_0}{\tan\alpha}\right| = \left|\dfrac{y_0}{f'(x_0)}\right|$

Longueur de la tangente : $\ell_T = \sqrt{y_0^2 + \ell_{ST}^2} = \sqrt{y_0^2 + \left(\dfrac{y_0}{f'(x_0)}\right)^2}$

longueur de la sous-normale : $\ell_{SN} = \left|\dfrac{y_0}{\tan\beta}\right| = |y_0 \times f'(x_0)|$

Longueur de la normale : $\ell_N = \sqrt{y_0^2 + \ell_{SN}^2} = \sqrt{y_0^2 + (y_0 f'(x_0))^2} = \left|y_0\sqrt{1 + f'^2(x_0)}\right|$

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5 \Longrightarrow f(3) = 2$
   $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 \Rightarrow f'(3) = 8$

Equation de la tangente : $y-2=8(x-3) \Longleftrightarrow y=8x-22$

Equation de la normale : $y-2=-\dfrac{x-3}{8}$

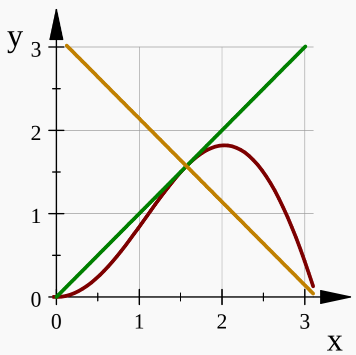
$\ell_{ST}=\left|\dfrac{y_0}{f'(x_0)}\right|=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

$\ell_T=\sqrt{y_0^2+\ell_{ST}^2}=\sqrt{4+\dfrac{1}{16}}=\dfrac{1}{4}\sqrt{65}$

$\ell_{SN}=|y_0\times f'(x_0)|=2\times 8=16$

$\ell_N=\sqrt{y_0^2+\ell_{SN}^2}=\sqrt{4+(16)^2}=2\sqrt{65}$

2. $f(x)=2px^2 \Longrightarrow y_0=f(2)=8p$
   $f'(x)=4px \Longrightarrow f'(2)=8p$
   Equation de la tangente : $y=8p(x-2)+8p=8px-8p$
   Equation de la normale : $y=-\dfrac{x-2}{8p}+8p$
   $\ell_{ST}=\left|\dfrac{y_0}{f'(x_0)}\right|=\dfrac{8p}{8p}=1$
   $\ell_T=\sqrt{y_0^2+\ell_{ST}^2}=\sqrt{64p^2+1}$
   $\ell_{SN}=|y_0\times f'(x_0)|=64p^2$
   $\ell_N=\sqrt{y_0^2+\ell_{SN}^2}=\sqrt{64p^2+64p^2}=8\sqrt{2}p$
3. $f(x)=x\sin x \Longrightarrow y_0=f(x_0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$
   $f'(x)=\sin x+x\cos x \Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$
   Equation de la tangente : $y=\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{\pi}{2}=x$
   Equation de la normale : $y=-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{\pi}{2}=\pi-x$
   $\ell_{ST}=\left|\dfrac{y_0}{f'(x_0)}\right|=\dfrac{\pi}{2}$
   $\ell_T=\sqrt{y_0^2+\ell_{ST}^2}=\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}+\dfrac{\pi^2}{4}}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$
   $\ell_{SN}=|y_0\times f'(x_0)|=\dfrac{\pi}{2}\times 1=\dfrac{\pi}{2}$
   $\ell_N=\sqrt{y_0^2+\ell_{SN}^2}=\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}+\dfrac{\pi^2}{4}}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$



4. $f(x) = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow f(1) = 1$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1) = -1$

Equation de la tangente : $y = -(x-1) + 1 = 2 - x$

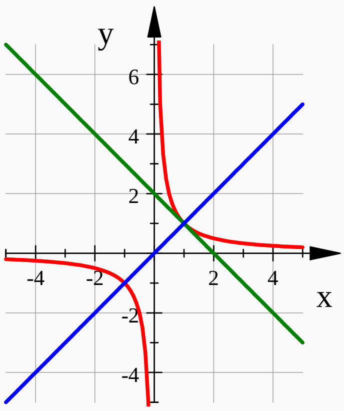
Equation de la normale : $y = (x-1) + 1 = x$

$\ell_{ST} = \left| \dfrac{y_0}{f'(x_0)} \right| = 1$

$\ell_T = \sqrt{y_0^2 + \ell_{ST}^2} = \sqrt{2}$

$\ell_{SN} = |y_0 \times f'(x_0)| = 1$

$\ell_N = \sqrt{y_0^2 + \ell_{SN}^2} = \sqrt{2}$



Exercice 11 Utiliser le théorème de L'Hospital pour caluler les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{e^{ax}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} x \cot 2x$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{1-\cos x}$
6. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x}$

Solution 11

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{e^{ax}} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{\alpha e^{\alpha x}} = 0$ pour $\alpha > 0$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1} = 0$

4. $\lim\limits_{x\to 0} x \cot 2x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cos 2x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - 2x \sin 2x}{2 \cos 2x} = \dfrac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + x\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x + \cos x - x\sin x}{\cos x} = 2$

6. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x}{1} = \cos a$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin^2 x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{(2x^2+1)}{\sqrt{(1-x^2)^5}}}{6\cos^3 x - 12\sin^2 x\cos x - 9\sin^2 x\cos x} = -\frac{1}{6}$$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\cos 3x\sin x}{\cos x\sin 3x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-9\sin 3x\sin x + 3\cos 3x\cos x}{-\sin x\sin 3x + 3\cos x\cos 3x} = 1$$

Exercice 12 Vérifier le théorème de Rolle pour les fonctions suivantes :

1. $y = x^2 - 3x + 2$ sur le segment $[1,2]$
2. $y = x^3 + 5x^2 - 6x$ sur le segment $[0,1]$
3. $y = \sin^2 x$ sur le segment $[0,\pi]$

Solution 12

1. $y = x^2 - 3x + 2$ sur le segment $[1,2]$

   La fonction $y = f(x)$ est un polynôme donc elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[1,2]$

   $f(1) = f(2) = 0$ et $y' = 2x - 3$; $y' = 0$ pour $x = \dfrac{3}{2} \in [1,2]$.

2. $y = x^3 + 5x^2 - 6x$ sur le segment $[0,1]$

   $y(0) = y(1) = 0$

   $y' = 3x^2 + 10x - 6$

   L'équation $3x^2 + 10x - 6 = 0$, admet deux racines :

   $$x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{43} - \frac{5}{3} \text{ et } x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{43} - \frac{5}{3}$$

   $\dfrac{1}{3}\sqrt{43} - \dfrac{5}{3} = 0.519\,15 \in [0,1]$

3. $y = \sin^2 x$ sur le segment $[0, \pi]$

   $\sin^2 0 = \sin^2 \pi = 0$

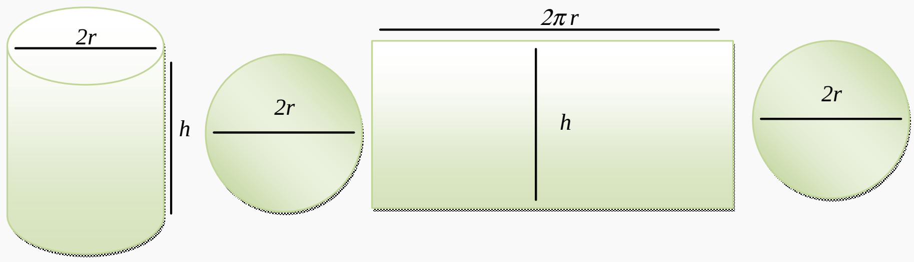
   $y' = 2 \sin x \cos x$: les racines de $y' = 0$ sur $[0, \pi]$ sont $0, \dfrac{\pi}{2}$ et π

Exercice 13 On démande de fabriquer un cylindre de rayon de base r et de hauteur h dont le volume est de 1 $(litre)$. On utilise une plaque de cuivre. Calculer les valeurs de r et h d'une façon que la quantité de matériau utilisée soit au minimum, en négligeant l'épaisseur de plaque.

Solution 13

Le volume du cylindre est $V = \pi r^2 h$

Si r et h sont mesurés en cm donc $V = 1\,l = 1000\,\text{cm}^3$ en négligeant l'épaisseur du matériaux



Le problème, c'est de déterminer les valeurs de h et r d'une façon que la surface du cylindre soit minimale.

La surface totale à utiliser est :

$$A = \underbrace{2\pi r^2}_{l'aire\ des\ disques\ bases} + \underbrace{2\pi rh}_{l'aire\ de\ la\ surface\ latérale}$$

Pour rendre A comme fonction à une variable on considère $h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{1000}{\pi r^2}$ donc $A = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$ la valeurs de r à chercher est celles qui annule $\dfrac{dA}{dr} = 4\pi r - \dfrac{2000}{r^2}$

$\dfrac{dA}{dr} = 0 \Rightarrow 4\pi r - \dfrac{2000}{r^2} \Rightarrow r^3 = \dfrac{500}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} \approx 5.42\,\text{cm}$

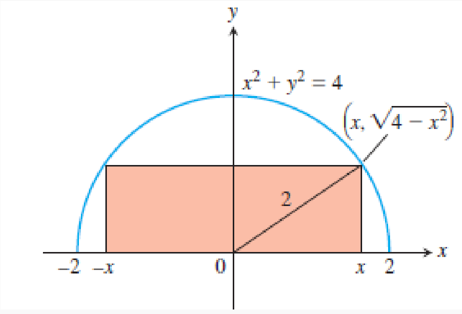
La valeur de h correspondante est :

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{2 \times 500}{\pi r^2} = \frac{2 \times r^3}{r^2} = 2r \approx 10.84\,\text{cm}$$

Exercice 14 Calculer l'aire maximale d'un rectangle inscrit dans le demi cercle supérieur $(y > 0)$ d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

Solution 14

rectangle inscrit dans le demi cercle supérieur : $x^2 + y^2 = 4$



Soit $M\left(x, \sqrt{4 - x^2}\right)$ le point où le sommet du rectangle touche le cercle, alors la longueur du rectangle est $\ell = 2x$ et sa largeur est $w = y = \sqrt{4 - x^2}$. L'aire du rectangle est donc $A = 2x\sqrt{4 - x^2}$ avec $x \in [0, 2]$ et $A(0) = A(2) = 0$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2x\sqrt{4 - x^2}\right) = \frac{8 - 4x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

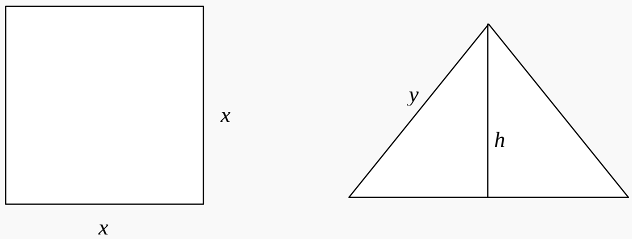
$$\frac{dA}{dx} = 0 \rightarrow 8 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = +\sqrt{2} = 1.4142$$

$$A = 2\sqrt{2}\sqrt{4 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = 4$$

Exercice 15 Un fil de longueur L est à utiliser pour faire un carré de côté x et un triangle équilatéral de côté y. Comment le fil doit être divisé pour que la somme des 2 aires du carré et du triangle soit minimale ? soit maximale ?

On rappelle qu'un triangle équilatéral a 3 côtés égaux et que l'aire d'un triangle est égale la moitié du produit de sa base et sa hauteur.

Solution 15



$$L = 4x + 3y \quad \text{et } 0 \le x \le \frac{L}{4}, 0 \le y \le \frac{L}{3} \quad \text{soit } x = \frac{L - 3y}{4}$$

Surface du carée : $S_1 = x^2$

$$\text{Surface du triangle : } S_2 = \frac{Base \times hauteur}{2} = \frac{y \times \frac{\sqrt{3}}{2}y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}y^2$$

$$S = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 = \left(\frac{L - 3y}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 = \frac{\left(9 + 4\sqrt{3}\right)y^2 - 6Ly + L^2}{16}$$

$S' = \left(9+4\sqrt{3}\right)\frac{y}{8} - \frac{3}{8}L$

$S' = 0 \Longleftrightarrow y = \dfrac{3L}{9+4\sqrt{3}} < \dfrac{L}{3}$

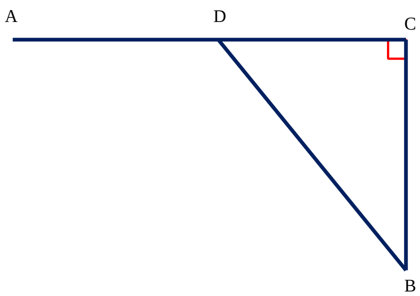
y	0		$\frac{3L}{9+4\sqrt{3}}$		$\frac{L}{3}$
$S'(y)$	$-$		0	$+$	
$S(y)$	$\frac{L^2}{16}$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	$\frac{L^2}{12\sqrt{3}}$

Max en $y = 0$ c'est-à-dire le fil est utilisé juste pour le carré.

Exercice 16 Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ. On connait les distances $AC = \ell$ et $CB = d$.

On sait que le tracteur va deux fois moins vite dans le champ que sur la route.

Il quitte la route en un point D de $[AC]$ à préciser. Les trajets successifs de A à D et de D à B sont supposés rectilignes.



Déterminez le point D pour que le temps total soit minimal. Discutez suivant ℓ et d.

Solution 16

Soit $DC = x$ avec $0 \leq x \leq \ell$. On a alors $AD = \ell - x$ et $DB = \sqrt{x^2+d^2}$

Si $V_C = v$ désigne la vitesse du tracteur dans le champ, sa vitesse sur la route est donc $V_R = 2v$; et le temps total mis par le tracteur pour atteindre B est :

$$t = \frac{AD}{V_R} + \frac{DB}{V_C} = \frac{\ell - x}{2v} + \frac{\sqrt{x^2+d^2}}{v}$$

On cherche l'abscisse x_0 du minimum de la fonction t sur $[0,\ell]$. On a :

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2v} + \frac{x}{v\sqrt{x^2+d^2}}$$

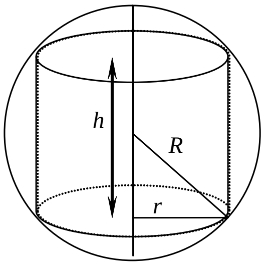
$-\dfrac{1}{2v} + \dfrac{x}{v\sqrt{x^2+d^2}} = 0 \Longrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow 4x^2 = x^2+d^2 \Longrightarrow x_0 = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$

$\dfrac{dt}{dx} \geq 0 \Longleftrightarrow 2x \geq \sqrt{x^2+d^2}$

- si $d \geq \sqrt{3}\ell \Longrightarrow \dfrac{dt}{dx} \leq 0$ sur $[0,\ell]$. La fonction $t(x)$ est strictement décroissante sur $[0,\ell]$ et atteint son minimum en $x_0 = \ell$, c'est-à-dire que le tracteur quitte la route en A.

– si $0 \leq d \leq \sqrt{3}\ell$ alors $\dfrac{dt}{dx} < 0$ pour $0 < x < \dfrac{d}{\sqrt{3}\ell}$
et $\dfrac{dt}{dx} > 0$ pour $\dfrac{d}{\sqrt{3}\ell} < x < \ell$
La fonction t passe donc par un minimum en $x_0 = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$

Exercice 17 Un cylindre de rayon r et de hauteur h, est inscrit dans une sphère de rayon R.Le milieu de l'axe du cylindre se trouve au centre de la sphère.



Trouver, en fonction de R, le rayon r et la hauteur h du cylindre de plus grand volume possible.Calculer r et h pour $R = \sqrt{3}$.

Solution 17

On a $R^2 = r^2 + (h/2)^2 \Longrightarrow h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$
$V = \pi r^2 h = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$
Le plus grand cylindre correspondant au volume maximal donc pour $\dfrac{dV}{dr} = 0$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr}\left(2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}\right) = 2\pi\frac{r\left(2R^2 - 3r^2\right)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \Longrightarrow 2R^2 - 3r^2 = 0$$

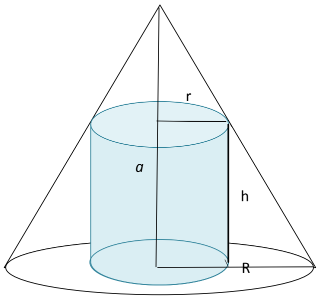
$\Longrightarrow r = \sqrt{\dfrac{2}{3}}R$

et $h = 2\sqrt{R^2 - \dfrac{2}{3}R^2} = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$

Pour $R = \sqrt{3} : r = \sqrt{2}$ et $h = 2$.

Exercice 18 Un cylindre de rayon r et de hauteur h, est inscrit dans un cône de révolution de rayon de base R et de hauteur a.

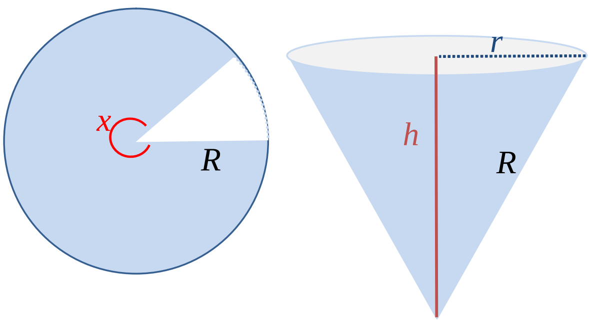
1. Trouver, en fonction de R et a, le rayon r et la hauteur h du cylindre de plus grand volume possible.
2. Calculer r et h pour $R = 60\,\text{cm}$ et $a = 100\,\text{cm}$



Solution 18

1. Le volume du cylindre est donné par $V = \pi r^2 h$.
   Pour exprimer V en fonction d'une seule variable cherchons une relation entre r et h.
   En utilisant la notion des triangles semblables on trouve : $\dfrac{r}{R} = \dfrac{a-h}{a}$ donc $h = a\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$
   $\Longrightarrow V = \pi r^2 a \left(1 - \dfrac{r}{R}\right) = a\pi \left(r^2 - \dfrac{r^3}{R}\right)$
   $\dfrac{dV}{dr} = a\pi \left(2r - 3\dfrac{r^2}{R}\right) = 0 \longrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \dfrac{2}{3}R \end{cases}$
   Volume maximal si $r = \dfrac{2}{3}R \longrightarrow h = a\left(1 - \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{3}a$
   $V = 0$ si $r = 0$ ou $r = R$
   $V_M = \pi \left(\dfrac{2}{3}R\right)^2 \left(\dfrac{a}{3}\right) = \dfrac{4\pi}{27} aR^2$
2. Pour $a = 100\,\text{cm}$ et $R = 60\,\text{cm}$:
   $r = \dfrac{2}{3} \times 60 = 40\,\text{cm} \qquad h = \dfrac{100}{3}$
   $V = \pi\,(40)^2 \times \dfrac{100}{3} = \dfrac{160\,000}{3}\pi\,\text{cm}^3$

Exercice 19 Dans un disque de papier de rayon R, on découpe un secteur angulaire d'angle x radians ($x \in [0, 2\pi]$), avec lequel on confectionne un cornet de frites conique. Déterminer x pour que le volume du cornet soit maximal.



Le rayon r de la section du cône est tel que : $2\pi r = Rx$ et le volume du cône est $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Solution 19

On a $2\pi r = Rx$ d'où $r = \dfrac{Rx}{2\pi}$
La hauteur h du cône est telle que : $h^2 + r^2 = R^2$ d'où

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

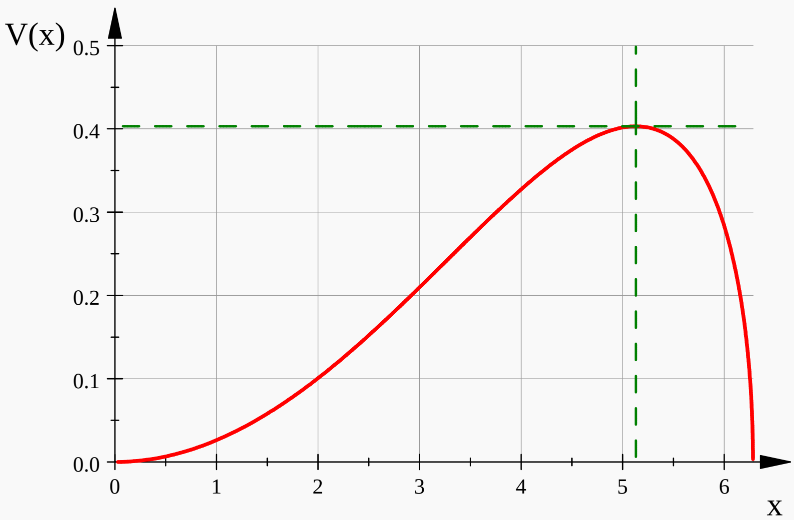
Le volume du cône est donc :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2 \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{R^3 x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

La fonction $V = V(x)$ est continue sur $[0, 2\pi]$ .Elle admet donc sur ce segment un maximum, qui est strictement positif (car $V(\pi) > 0$).

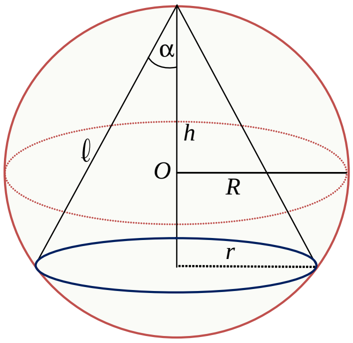
La fonction V est dérivable sur $[0, 2\pi[$, et :
$V'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{R^3 x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}\right) = \dfrac{R^3}{24\pi^2}\dfrac{x\left(8\pi^2 - 3x^2\right)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$
$V_{\max} \rightarrow \dfrac{dV}{dx} = 0$
Cette dérivée s'annule pour $x = 0$ et $x = \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
Comme $V(0) = V(2\pi) = 0$, le maximum de la fonction V sur $[0, 2\pi]$ ne peut être atteint qu'en $x = \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
La valeur de ce maximum est

$$V_{\max} = \frac{R^3}{24\pi^2}\left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 \sqrt{4\pi^2 - \left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3$$



Exercice 20 On considère la sphère Σ de centre O et de rayon $R = 1$. On voudrait mettre à l'intérieur de Σ la partie principale d'un cône, dont le sommet est le pôle nord de Σ. On suppose que le rayon de base du cône est r, sa hauteur est $h \in [1, 2]$ et sa directrice est de longueur

ℓ. On rappelle que l'aire d'un tel cône est $S = \pi r \ell$ et le volume est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. L'objectif de cet exercice est de mettre un cône de surface maximale dans la sphère



1. Montrer que $r^2 = 2hR - h^2$ où $R = 1$ est le rayon de la sphère.
2. Déduire que $S^2 = 2\pi^2(2h^2 - h^3)$.
3. Quels doivent être h, r et ℓ si S est maximale ?
4. Les valeurs ainsi trouvées de h et r, correspondent -ils à un volume maximal du domaine intérieur au cône ? Justifier !
5. Trouver l'aire maximale du cône qu'on peut insérer dans la shpère.

Solution 20

1. On a $\cos\alpha = \dfrac{\ell/2}{R} = \dfrac{h}{\ell} \Longrightarrow \ell^2 = 2hR$
   Dans une section plane du cône :
   $$\ell^2 = h^2 + r^2 \Longrightarrow r^2 = \ell^2 - h^2 = 2hR - h^2 = 2h - h^2$$
2. $S = \pi r \ell \Longrightarrow S^2 = \pi^2 r^2 \ell^2 = \pi^2 \left(2h - h^2\right)(2h) = 2\pi^2 \left(2h^2 - h^3\right)$
3. $S_{\max} \to \dfrac{dS}{dh} = 0 \Longrightarrow \dfrac{d}{dh}\left(2\pi^2 h^2 (2-h)\right) = 2\pi^2 \left(4h - 3h^2\right) = 0 \Longrightarrow h = \dfrac{4}{3} \to S_{\max}$
   $r = \sqrt{2h - h^2} = \sqrt{2\left(\dfrac{4}{3}\right) - \left(\dfrac{4}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
   $\ell^2 = 2hR = 2h \Longrightarrow \ell = \sqrt{2h} = \sqrt{\dfrac{8}{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
4. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\pi}{3}\left(2h^2 - h^3\right)$
   $\dfrac{dV}{dh} = \dfrac{\pi}{3}\left(4h - 3h^2\right) = 0 \Longrightarrow h = \dfrac{4}{3} \to V_{\max}$
5. $S_{\max} = \pi r \ell = \pi \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \times \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{8\pi}{3\sqrt{3}}$ unité de surface.

Exercice 21 Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = x - x^3$ sur l'intervalle $[-2, 1]$ en précisant la valeur de c.

Solution 21

Le polynôme f vérifie bien entendu les hypothèses du théorème, avec $f(-2) = 6$ et $f(1) = 0$, $f'(x) = 1 - 3x^2$, la valeur de c doit vérifier : $-6 = 3\left(1 - 3c^2\right)$ soit $c^2 = 1$ de solution unique $c = -1$ sur $]-2, 1[$.

Exercice 22 On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}; x \in [a, b]$, avec $0 < a < b < \infty$
montrer que, pour tout $h \in]0, b - a[$, il existe un unique θ vérifiant

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a + \theta h) \tag{E}$$

(les valeurs de a et b étant fixés). On note θ_h cette valeur de θ. Calculer θ_h (en fonction de a et h déterminer $\lim\limits_{h \to 0+} \theta_h$)

Solution 22

Soit $\theta \in]0, 1[$ vérifiant

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a + \theta h)$$

l'existence d'au moins un θ est donnée par le TAF, on veut montrer ici son unicité et on cherche la limite de θ quand $h \longrightarrow 0^+$.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ alors $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
La relation (E) donne :
$\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a} = -\dfrac{h}{(a+\theta h)^2}$
$\Longleftrightarrow -\dfrac{h}{a^2 + ha} = -\dfrac{h}{(a+\theta h)^2} \Longrightarrow a^2 + ha = (a+\theta h)^2 = a^2 + 2\theta h + \theta^2 h^2$
et donc

$$\theta = \frac{\sqrt{a(a+h)} - a}{h}$$

Ceci prouve bien l'unicité de θ
En posant, pour $y > -a$, $\varphi(t) = \sqrt{a(a+t)}$ soit $\varphi(0) = a$,
on a aussi $\theta_h = \dfrac{\sqrt{a(a+h)} - a}{h} = \dfrac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h}$
Alors $\lim\limits_{h \to 0+} \theta_h = \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \varphi'(0)$
$\varphi'(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{a(a+t)}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{\sqrt{a(a+t)}} \Longrightarrow \varphi'(0) = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{h \to 0+} \theta_h$

Exercice 23 On veut étudier les sommes

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En utilisant la formule des accroissements finis pour la fonction $\ln x$, montrer que pour tout $x > 0$ on a
$$\frac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$
2. Soit n un entier au moins égal à 2.
Écrire cet encadrement pour $x = 1, x = 2, ..., x = n-1$. En déduire que l'on a :
$$S_n - 1 < \ln n < S_{n-1}$$
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$

Solution 23

1. La dérivée de $\ln x$ est $\frac{1}{x}$. Pour tout $x > 0$, il existe un nombre c tel que $x < c < x+1$
$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}((x+1) - x) = \frac{1}{c}$$
Puisque $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ on en déduit $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$
2. Écrivons cet encadrement pour différentes valeurs de x :
$$\begin{array}{ll} x = 1 & \frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1} \\ x = 2 & \frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2} \\ \vdots \quad \vdots & \quad \vdots \\ x = n-1 & \frac{1}{n} < \ln n - \ln(n-1) < \frac{1}{n-1} \end{array}$$
et ajoutons ces inégalités : la plupart des termes $\ln k$ se simplifient et il reste
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n - \ln 1 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$
c'est-à-dire : $S_n - 1 < \ln n < S_{n-1}$.
3. Puisque $S_1 = 1$, l'inégalité $S_n \leq 1 + \ln n$ est vraie pour tout $n \geq 1$, on a $\ln n < S_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$, donc on a $\ln(n+1) < S_n$ pour tout $n \geq 1$.Puisque $1 + \ln n$ et $\ln(n+1)$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ on en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.
Pour tout $n \geq 2$, en divisant par $\ln n > 0$ dans l'encadrement précédent, il vient
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} < \frac{S_n}{\ln n} < \frac{1}{\ln n} + 1$$
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\ln n} + 1\right) = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$

Exercice 24 Calculer les développements limités suivants au point 0,à l'ordre n :

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^{-x}, n = 3$
2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}, n = 3$
3. $\sin x \cos 2x, n = 3$
4. $\cos x \ln(1+x), n = 3$
5. $(1+x^3)\sqrt{1-x^2}, n = 3$
6. $\ln^2(1+x), n = 3$
7. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right), n = 4$
8. $e^{\sin x}, n = 4$
9. $(\cos x)^{\sin x}, n = 4$
10. $\dfrac{1}{1+x+x^2}, n = 4$
11. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}, n = 4$
12. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}, n = 2$

Solution 24

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^4)$

   $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$

   $\dfrac{1}{1-x} - e^{-x} = (1 + x + x^2 + x^3 + O(x^4)) - \left(1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)\right)$

   $(1 + x + x^2 + x^3) - \left(1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3\right) = 2x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{7}{6}x^3 + O(x^4)$

2. $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{16}x^3 + O(x^4)$

   $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + O(x^4)$

   $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \dfrac{1}{4}x^2 + O(x^4)$

3. $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + O(x^5)$

   $\cos 2x = 1 - 2x^2 + O(x^4)$

   $\sin x \cos 2x = \left(x - \dfrac{1}{6}x^3\right)(1 - 2x^2) = x - \dfrac{13}{6}x^3 + O(x^4)$

4. $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)$

   $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + O(x^4)$

   $\cos x \ln(1+x) = \left(1 - \dfrac{1}{2}x^2\right)\left(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3\right) = x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$

5. $\sqrt{1-x^2} = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)$

   $(1+x^3)\sqrt{1-x^2} = (1+x^3)\left(1 - \dfrac{1}{2}x^2\right) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + x^3 + O(x^4)$

6. $\ln^2(1+x) = \left(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3\right)^2 = x^2 - x^3 + O(x^4)$

7. $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + O(x^5)$

   $\dfrac{\sin x}{x} = 1 - \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{120}x^4 + O(x^5)$

   On pose $u = -\dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{120}x^4 + O(x^6)$ alors

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + O\left(u^3\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4\right)^2$$
$$= -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + O\left(x^6\right)$$

8. $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^7\right)$

On pose $u = x - \frac{1}{6}x^3$

$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + O\left(u^5\right)$

Soit donc $u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + O\left(x^4\right), u^3 = x^3 + O\left(x^4\right), u^4 = x^4 + O\left(u^5\right)$

$1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$

$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O\left(x^5\right)$

9. $(\cos x)^{\sin x} = \exp\left(\sin x \ln\left(\cos x\right)\right)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O\left(x^6\right) \qquad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^5\right)$

on pose $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O\left(x^6\right) \underset{x\to 0}{\rightarrow} 0$

alors $\ln\left(\cos x\right) = \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + O\left(u^5\right)$

On demande le développement à l'ordre 5 donc

$u^2 = \frac{1}{4}x^4 + O\left(x^5\right) \qquad u^3 = u^4 = O\left(x^5\right)$

$\ln\left(\cos x\right) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O\left(x^5\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 + O\left(x^5\right)\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + O\left(x^5\right)$

$$\sin x \ln\left(\cos x\right) = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^5\right)\right)\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + O\left(x^5\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}x^3 + O\left(x^5\right)$$

soit $y = -\frac{1}{2}x^3 + O\left(x^5\right)$

$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + O\left(y^5\right)$

$(\cos x)^{\sin x} = \exp\left(\sin x \ln\left(\cos x\right)\right) = 1 - \frac{1}{2}x^3 + O\left(x^5\right)$

10. On peut chercher le $DL_4(0)$ de $F(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$ par différentes méthodes, voici trois méthodes :

(a) On pose $u = x + x^2$ donc $F(x) = \dfrac{1}{1+u}$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + O\left(u^6\right)$$
$$= 1 - \left(x + x^2\right) + \left(x + x^2\right)^2 - \left(x + x^2\right)^3 + \left(x + x^2\right)^4$$

en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4,on trouve :

$F(x) = 1 - x + x^3 - x^4 + O\left(x^5\right)$

(b) $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x) = 1$ et $g(x) = 1 + x + x^2$

on pose la division suivant les puissances croissantes, en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4 :

$$
\begin{array}{cccccc|l}
1 & & & & & & 1+x+x^2 \\ \cline{7-7}
-1 & -x & -x^2 & & & & 1-x+x^3-x^4 \\ \cline{1-6}
 & -x & -x^2 & & & & \\
 & x & x^2 & x^3 & & & \\ \cline{1-6}
 & & & x^3 & & & \\
 & & & -x^3 & -x^4 & -x^5 & \\ \cline{1-6}
 & & & & -x^4 & -x^5 & \\
 & & & & x^4 & x^5 & \\ \cline{1-6}
 & & & & & O\left(x^6\right) &
\end{array}
$$

(c) On propose que $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + O\left(x^5\right)$

donc $\dfrac{1}{1+x+x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + O\left(x^5\right)$

$1 = \left(1+x+x^2\right)\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + O\left(x^5\right)\right)$

$= a_0 + (a_0+a_1)\,x + (a_0+a_1+a_2)\,x^2 + (a_1+a_2+a_3)\,x^3 + (a_2+a_3+a_4)\,x^4 + (a_3+a_4)\,x^5$

Par identification on trouve :

$$
\begin{cases}
a_0 = 1 \\
a_0 + a_1 = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_0 = -1 \\
a_0 + a_1 + a_2 = 0 \Longrightarrow a_2 = 0 \\
a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Longrightarrow a_3 = -a_1 = 1 \\
a_2 + a_3 + a_4 = 0 \Longrightarrow a_4 = -a_3 = -1 \\
a_3 + a_4 = 0
\end{cases}
$$

$$F(x) = 1 - x + x^3 - x^4 + O\left(x^5\right)$$

11. $F(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$

$\sin x - 1 = -1 + x - \dfrac{1}{6}x^3 + O\left(x^5\right)$

$\cos x + 1 = 2 - \dfrac{1}{2}x^2 + O\left(x^4\right) = 2\left(1 - \dfrac{1}{4}x^2\right) + O\left(x^5\right)$

On pose $u = \dfrac{1}{4}x^2$

$\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + O\left(u^5\right) = 1 + \dfrac{1}{4}x^2 + \left(\dfrac{1}{4}x^2\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}x^2\right)^3 + O\left(u^5\right)$

$\dfrac{1}{\cos x + 1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{4}x^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{48}x^4 + O\left(x^5\right)$

$F(x) = \left(-1 + x - \dfrac{1}{6}x^3 + O\left(x^5\right)\right)\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{48}x^4 + O\left(x^5\right)\right)$

$= -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{24}x^3 - \dfrac{1}{48}x^4 + O\left(x^5\right)$

Remarque

On peut faire la division suivant les puissances croissantes, en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4

12. $F(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$

$\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + O\left(x^4\right)$

$\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + O\left(x^4\right) = x\left(1 - \dfrac{1}{6}x^2\right) + O\left(x^4\right)$

On pose $u = \dfrac{1}{6}x^2$

$\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + O\left(u^3\right)$

$\dfrac{1}{(1-x^2/6)} = 1 + \dfrac{1}{6}x^2 + O\left(x^3\right)$

$\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6}x + O\left(x^3\right)$

$F(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}x^2 + O\left(x^3\right)\right)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6}x + O\left(x^3\right)\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2 + O\left(x^3\right)$

Exercice 25 Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

de trois façons :

1. par la formule de Taylor-Young
2. par composition de développements limités
3. en commençant par calculer le développement limité de f'.

Solution 25

1. Pour utiliser la formule de Taylor-Young on doit d'abord calculer les dérivées de f jusqu'à l'ordre 3 en 0 :

$f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{x+2}\right) \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2}\dfrac{2}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{x^2+2x+2} \qquad f'(0) = \dfrac{1}{2}$

$f''(x) = -\dfrac{2x+2}{\left(x^2+2x+2\right)^2} \qquad f''(0) = -\dfrac{1}{2}$

$f'''(x) = 2\dfrac{3x^2+6x+2}{\left(x^2+2x+2\right)^3} \qquad f'''(0) = \dfrac{1}{2}$

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+O\left(x^4\right)=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+O\left(x^4\right)$$

2. On a $\arctan u=u-\dfrac{u^3}{3!}+O\left(u^4\right)$

   avec $u=\dfrac{x}{x+2}$ on trouve

   $$f(x)=\frac{x}{x+2}-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x+2}\right)^3+O\left(x^4\right)$$

   $$=\frac{x}{x+2}-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x+2}\right)^3=2x\frac{x^2+6x+6}{3\left(x^3+6x^2+12x+8\right)}+O\left(x^4\right)$$

   En effectuant la division selon les puissances croissantes et en s'arrêtant à $O\left(x^3\right)$ car le résultat sera multiplié par x on a

   $$\begin{array}{rrrr|l}
6 & +6x & +x^2 & +O\left(x^3\right) & 8+12x+6x^2+x^3 \\ \cline{5-5}
-6 & -6x & -\frac{9}{2}x^2 & +O\left(x^3\right) & \frac{3}{4}-\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}x^2 \\ \cline{1-4}
 & -3x & -\frac{7}{2}x^2 & +O\left(x^3\right) & \\
 & 3x & +\frac{9}{2}x^2 & +O\left(x^3\right) & \\ \cline{1-4}
 & & x^2 & +O\left(x^3\right) & \\
 & & -x^2 & +O\left(x^3\right) & \\ \cline{1-4}
 & & & +O\left(x^3\right) &
\end{array}$$

   $$f(x)=\frac{2}{3}x\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}x^2\right)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+O\left(x^4\right)$$

3. $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}x^2+O\left(x^3\right)$

   $$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+O\left(x^4\right)$$

Exercice 26 Calculer le développement limité en $x=0$ à l'ordre 3 de $\ln\left(1+\sin^2 x\right)$. En déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{2x^2}$

Solution 26

Étant donné que : $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+O\left(x^4\right)$

$\sin^2 x=x^2+O\left(x^4\right)$

$\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{3}+\cdots$

Alors $\ln\left(1+\sin^2 x\right)=x^2+O\left(x^4\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+O\left(x^4\right)}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

Exercice 27 Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln\left(1 - x\cos^2 x\right)$. En déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1 - x\cos^2 x\right)}{3x}$.

Solution 27

On a $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + O\left(x^4\right)$

alors $\cos^2 x = \left(1 - \dfrac{x^2}{2} + O\left(x^4\right)\right)^2 = 1 - x^2 + O\left(x^4\right)$ et $x\cos^2 x = x - x^3 + O\left(x^4\right)$

comme le développement limité de $\ln(1-u)$ en $u = 0$ est

$\ln(1-u) = -u - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u^3}{3} - \dfrac{u^4}{4} - \cdots - \dfrac{u^n}{n} + O\left(u^{n+1}\right)$

on conclut que

$\ln\left(1 - x\cos^2 x\right) = -x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + O\left(x^4\right)$

et $\dfrac{\ln\left(1 - x\cos^2 x\right)}{3x} = \dfrac{-x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3}{3x} = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6}x + \dfrac{2}{9}x^2$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1 - x\cos^2 x\right)}{3x} = -\dfrac{1}{3}$

Exercice 28 Soit la fonction pour tout définie par

$$f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$$

1. Déterminer le développement limité de $f(x)$, à l'ordre 2 au voisinage de 0 .
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe.
3. Déterminer une équation de l'asymptote en $+\infty$ ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

Solution 28

1. Soit $u = x + x^2$

   $f(x) = \sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 + O\left(u^3\right)$

   $= 1 + \dfrac{1}{2}\left(x + x^2\right) - \dfrac{1}{8}\left(x + x^2\right)^2 + O\left(u^3\right)$

   en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2

   $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\left(x + x^2\right) - \dfrac{1}{8}\left(x^2\right) + O\left(x^3\right)$

   $= 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + O\left(x^3\right)$

2. Une équation de la tangente en $x = 0$ est $y = 1 + \frac{1}{2}x$

$f(x) - \left(1 + \frac{1}{2}x\right) = \frac{3}{8}x^2 + O\left(x^3\right)$

Cette expression est positive dans un voisinage de 0 donc la courbe est au-dessus de la tangente dans un voisinage de 0 .

3. On pose $X = \frac{1}{x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$

$f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}} = \sqrt{\frac{X^2 + X + 1}{X^2}} = \frac{\sqrt{X^2 + X + 1}}{|X|} = \frac{\sqrt{X^2 + X + 1}}{X}$ car $X > 0$

En utilisant le développement limité du (1). on en déduit que

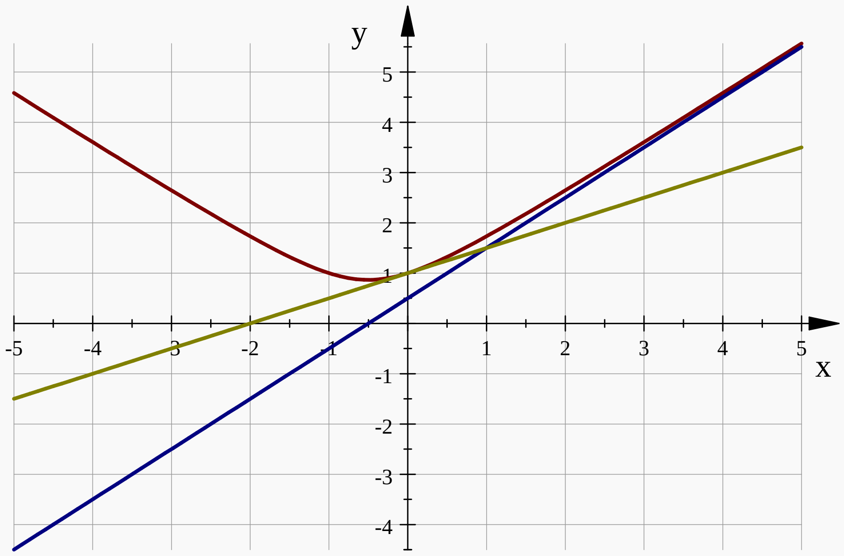
$f(x) = \frac{1}{X}\left(1 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}X^2 + O\left(X^3\right)\right) = \frac{1}{X} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}X + O\left(X^2\right)$

$= x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Une équation de l'asymptote en $+\infty$ est $y = x + \frac{1}{2}$

$f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Cette expression est positive lorsque $x \to +\infty$ donc la courbe est au-dessus de l'asymptote en $+\infty$



Exercice 29 Soit $f : D \to \mathbb{R}$: où $D =]-1, 1[\cup]1, +\infty[$, définie pour tout $x \in D$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right) \ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|$$

1. Donner le développement limité de f , à l'ordre 3, dans un voisinage de 0.
   En déduire que le graphe de $f(x)$ admet une tangente (T) au point d'abscisse $x = 0$.
   Donner une équation cartésienne de (T) et préciser la position du graphe par rapport à (T).
2. En utilisant un développement asymptotique de $f(x)$ en $+\infty$, démontrer que le graphe de admet une asymptote (A)

Donner une équation cartésienne de (A) et préciser la position du graphe de par rapport à (A).

Solution 29

1. $$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2-1\right)\left(\ln|1+x| - \ln|1-x|\right) \\ &= \left(x^2-1\right)\left(\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+O\left(x^4\right)\right) - \left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+O\left(x^4\right)\right)\right) \\ &= \left(x^2-1\right)\left(2x+\frac{2}{3}x^3+O\left(x^4\right)\right) \\ &= -2x+\frac{4}{3}x^3+O\left(x^4\right) \end{aligned}$$
   Une équation de la tangente en $x=0$ est $y=-2x$
   $f(x)-(-2x) = \frac{4}{3}x^3+O\left(x^4\right)$ est du signe de $\frac{4}{3}x^3$
   - Si $x>0$ la tangente est au dessous de la courbe.
   - Si $x<0$ la tangente est au dessus de la courbe.

2. Soit $t=\frac{1}{x} \to 0$ si $x \to +\infty$
   $$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{1}{t^2}-1\right)\ln\left|\frac{1+\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}}\right| = \frac{1-t^2}{t^2}\ln\left|\frac{\frac{t+1}{t}}{\frac{t-1}{t}}\right| \\ &= \frac{1-t^2}{t^2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| \\ &= -\frac{1}{t^2}\left(\left(t^2-1\right)\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right) \\ &= -\frac{1}{t^2}\left(-2t+\frac{4}{3}t^3+O\left(t^4\right)\right) \\ &= \frac{2}{t}-\frac{4}{3}t+O\left(t^2\right) \end{aligned}$$
   Alors $f(x) = 2x-\frac{4}{3x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)$
   $f(x)-2x = -\frac{4}{3x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   donc donc la droite d'équation $y=2x$ est asymptote à la courbe
   $(f(x)-2x)$ est strictement négatif lorsque $x \to +\infty$ la courbe est au dessus de l'asymptote.

Exercice 30 Soit $f :]-1,0[\cup]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

1. Déterminer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.

3. Déterminer alors l'équation de la tangente en 0 et étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en0.

Solution 30

1. $\ln(1+x) - x$ est divisée par x^2, alors on calcule le $DL_4(0)$ de f

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O(x^5)$$

$$\ln(1+x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O(x^5)$$

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O(x^5)}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + O(x^3)$$

2. $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + O(x^3)\right) = -\frac{1}{2}$$

$f(x)$ est prolongeable par continuité en 0, soit $g(x)$ ce prolongement :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + O(x^3)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + O(x^2)\right) = \frac{1}{3}$$

donc $g(x)$ est alors dérivable en 0.

3. $$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + O(x^3)$$

l'équation de la tangente en 0 est $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$

$$f(x) - y = -\frac{1}{4}x^2 + O(x^3)$$

$-\frac{1}{4}x^2$ est négative $\forall x$, donc la courbe de f est au dessous de la tangente.

Exercice 31 Soit la fonction

$$f(x) = \frac{e^x \sin x - \ln(1+x)}{x^2}.$$

1. Montrer que f et prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que le prolongement de f est dérivable en 0.

Solution 31

$$f(x) = \frac{e^x \sin x - \ln(1+x)}{x^2}$$

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}x^2 + x^2 O(x)\right) = \frac{3}{2}$
   $f(x)$ n'est pas définie en $x = 0$, mais sa limite existe en ce point. donc f et prolongeable par continuité en 0.
   Son prolongement est donné par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{3}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - \frac{3}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}x^2 + x^2 O(x) - \frac{3}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}x^2 + x^2 O(x)}{x}$
   $= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{4}x + xO(x)\right) = 0.$
   Donc le prolongement de f est dérivable en 0.

Exercice 32 Calculer les développements limités de $f(x)$ au point x_0 à l'ordre n, dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x}; n = 3, x_0 = 2$
2. $f(x) = x^3; n = 4; x_0 = -2$
3. $f(x) = x^4 + 1; n = 4; x_0 = 1$
4. $f(x) = \sin x; n = 3; x_0 = \frac{\pi}{3}$
5. $f(x) = \ln x, n = 4, x_0 = 1$
6. $f(x) = \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}, n = 2, x_0 = 1$

Solution 32

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

1. ici on peut utiliser aussi une autre méthode.
   On pose $h = x - 2$ alors $f(x) = \sqrt{x} = \sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{h}{2}}$
   Comme $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + \cdots + O\left(u^{n+1}\right)$
   avec $u = \frac{h}{2}$ on aura : $\sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{h}{2}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{32} + \frac{h^3}{128} + O\left(h^4\right)\right)$
   d'où :
   $$f(x) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{x-2}{4} - \frac{(x-2)^2}{32} + \frac{(x-2)^3}{128} + O\left((-2)^4\right)\right)$$

2. $f(x) = x^3 \qquad f(-2) = -8$
$f'(x) = 3x^2 \qquad f'(-2) = 12$
$f''(x) = 6x \qquad f''(-2) = -12$
$f'''(x) = 6 \qquad f'''(-2) = 6$
Alors :
$$f(x) = -8 + 12(x+2) - 6(x+2)^2 + (x+2)^3 + O\left((x+2)^4\right)$$

3. $f(x) = x^4 + 1 \qquad f(1) = 2$
$f'(x) = 4x^3 \qquad f'(1) = 4$
$f''(x) = 12x^2 \qquad f''(1) = 12$
$f'''(x) = 24x \qquad f'''(1) = 24$
$f^{(4)}(x) = 24 \qquad f^{(4)}(x) = 24$
donc :
$$x^4 + 1 = 2 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4 + O\left((x-1)^5\right)$$

4. $f(x) = \sin x \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$f'(x) = \cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
$f''(x) = -\sin x \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
$f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + O\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right)$
Finalement :
$$f(x) = \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + O\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right)$$

5. $f(x) = \ln x \qquad f(1) = \ln 1 = 0$
$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 1$
$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -1$
$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f'''(1) = 2$
$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \qquad f^{(4)}(1) = -6$
En appliquant la formule de Taylor on trouve :
$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + O\left((x-1)^5\right)$$

6. $f(x) = \frac{\ln(x)}{(1+x)^2} \qquad f(1) = 0$
$f'(x) = \frac{x+1-2x\ln x}{x(x+1)^3} \qquad f'(1) = \frac{1}{4}$
$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-2x\ln x+1}{x(x+1)^3}\right) = -\frac{5x^2+6x+1-6x^2\ln x}{x^2(x+1)^4} \qquad f''(1) = \frac{3}{4}$

En appliquant la formule de Taylor on trouve :

$$\frac{\ln(x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{8}(x-1)^2 + O\left((x-1)^3\right)$$

Remarque

On peut aussi utiliser un changement de variable : on pose $y = x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$

donc : $(x = y+1)$

$f(x) = \dfrac{\ln(1+y)}{(2+y)^2} = \dfrac{\ln(1+y)}{4\left(1+\frac{y}{2}\right)^2}$

$\ln(1+y) = y - \dfrac{1}{2}y^2 + O(y^3)$

$\dfrac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^2} = 1 - y + \dfrac{3}{4}y^2 + O(y^3)$

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+y)}{4\left(1+\frac{y}{2}\right)^2} &= \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{2}y^2 + O(y^3)\right)\left(1 - y + \frac{3}{4}y^2 + O(y^3)\right)\\ &= \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}y^2 + O(y^3) = \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{8}(x-1)^2 + O\left((x-1)^3\right)\end{aligned}$$

Exercice 33 Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3
2. $\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ en $+\infty$ et $-\infty$ à l'ordre 1
3. $e^{2/x}$ en $+\infty$ à l'ordre 3
4. $e^{-1/x}$ en $-\infty$ à l'ordre 3
5. $\dfrac{x^2-x}{1+x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2
6. $\frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{2-x+x^2}}{x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2

Solution 33

Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de f (x) en $a = +\infty$ (ou en $a = +\infty$) en posant $x = \dfrac{1}{t}$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$au voisinage de 0.

1. On pose $u = \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   Alors

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} &= \sqrt{1+\frac{2}{x}} = \sqrt{1+2u}\\ &= 1 + \frac{2u}{2} - \frac{(2u)^2}{8} + \frac{(2u)^3}{16} + O(u^4)\\ &= 1 + u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u^3 + O(u^4)\\ &= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\end{aligned}$$

2. On pose $y = \dfrac{1}{x}$
   - en $+\infty$: $y \underset{x\to+\infty}{\to} 0^+$

     $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \dfrac{1/y}{1/y-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{y^2}} = \dfrac{1}{1-y}\sqrt{\dfrac{1+y^2}{y^2}} \overset{y>0}{=} \dfrac{\sqrt{1+y^2}}{y(1-y)}$

     $\sqrt{1+y^2} = 1 + \dfrac{1}{2}y^2 + O(y^3)$

     $\dfrac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + O(y^3)$

     $\dfrac{\sqrt{1+y^2}}{y(1-y)} = \dfrac{1}{y}\left(1+y+y^2+O(y^3)\right)\left(1+\dfrac{1}{2}y^2+O(y^3)\right)$

     $\dfrac{\sqrt{1+y^2}}{y(1-y)} = \dfrac{1}{y} + 1 + \dfrac{3}{2}y + O(y^2)$

     $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{2x} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

     On en déduit que le graphe de la fonction admet la droite d'équation $y = x+1$ comme asymptote en $+\infty$
   - en $-\infty$: $y \underset{x\to-\infty}{\to} 0^-$

     $f(x) = \dfrac{1/y}{1/y-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{y^2}} = \dfrac{1}{1-y}\sqrt{\dfrac{1+y^2}{y^2}} \overset{y<0}{=} -\dfrac{\sqrt{1+y^2}}{y(1-y)}$

     $= -\left(x+1+\dfrac{3}{2x}+O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = -x-1-\dfrac{3}{2x}+O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

     On en déduit que le graphe de la fonction admet la droite d'équation $y = -x-1$ comme asymptote en $-\infty$.

3. Soit $t = \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

   $e^{2/x} = e^{2t} = 1 + 2t + 2t^2 + \dfrac{4}{3}t^3 + O(t^4)$

   $= 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{3x^3} + O\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

4. Soit $t = \dfrac{1}{x} \underset{x\to-\infty}{\to} 0$

   $e^{-1/x} = e^{-t} = 1 - t + \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{6}t^3 + O(t^4)$

   $= 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{6x^3} + O\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

5. On pose $y = \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

   $\dfrac{x^2-x}{1+x} = \dfrac{1/y^2-1/y}{1+1/y} = -\dfrac{1-y}{y^2+y} = \dfrac{1}{y}\dfrac{1-y}{y+1}$

   $\dfrac{1}{y+1} = 1 - y + y^2 - y^3 + O(y^4)$

   $\dfrac{1}{y}\dfrac{1-y}{y+1} = \dfrac{1}{y}(1-y)\left(1-y+y^2-y^3+O(y^4)\right)$

   $= \dfrac{1}{y} - 2 + 2y - 2y^2 + y^3 + O(y^4)$

   $= x - 2 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + O\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

6. On pose $t = \dfrac{1}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{2-x+x^2}}{x} = t\left(\sqrt{3+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}-\sqrt{2-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}\right)$$

$$= \sqrt{3t^2+t+1}-\sqrt{2t^2-t+1}$$

$$= \sqrt{1-(-t-3t^2)}-\sqrt{1-(t-2t^2)}$$

$$\sqrt{1-(-t-3t^2)} = 1+\frac{1}{2}t+\frac{11}{8}t^2+O\left(t^3\right)$$

$$\sqrt{1-(t-2t^2)} = 1-\frac{1}{2}t+\frac{7}{8}t^2+O\left(t^3\right)$$

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{2}t+\frac{11}{8}t^2+O\left(t^3\right)\right)-\left(1-\frac{1}{2}t+\frac{7}{8}t^2+O\left(t^3\right)\right)$$

$$= t+\frac{1}{2}t^2+O\left(t^3\right)$$

$$= \frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Exercice 34 Déterminer le développement limité à l'ordre 1 , au voisinage de 1 de la fonction définie par :

$$f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$$

Solution 34

On pose $t = x-1 \Leftrightarrow x = t+1$

$$f(x) = x^{\frac{1}{x-1}} = (1+t)^{1/t} = \exp\left(\frac{\ln|1+t|}{t}\right)$$

$$\frac{\ln|1+t|}{t} = \frac{t-\frac{t^2}{2}+O\left(t^3\right)}{t} = 1-\frac{t}{2}+O\left(t^2\right)$$

$$f(x) = e^{1-\frac{t}{2}+O\left(t^2\right)} = ee^{\frac{-t}{2}+O\left(t^2\right)} = e\left(1-\frac{t}{2}+O\left(t^2\right)\right)$$

$$= e\left(1-\frac{x-1}{2}+O\left((x-1)^2\right)\right)$$

$$f(x) = e-\frac{e}{2}(x-1)+O\left((x-1)^2\right)$$

Exercice 35 Soit

$$f(x) = e^{\sin x}$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$ de $f(x)$.
2. Donner un équivalent de $f(x)-e$ en $\dfrac{\pi}{2}$.

3. En déduire $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{\sin x}-e}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

Solution 35

On pose $t = x - \frac{\pi}{2}$ alors $x = t + \frac{\pi}{2}$

1. $e^{\sin x} = e^{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\cos t} = e^{1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+O\left(t^5\right)} = ee^{-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+O\left(t^5\right)}$

$$= e\left(1+\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}\right)^2\right)$$
$$= e\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+\frac{1}{2}\left(\frac{t^4}{4}\right)+O\left(t^5\right)\right)$$
$$= e\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{6}+O\left(t^5\right)\right) = e-\frac{e}{2}t^2+\frac{e}{6}t^4+O\left(t^5\right)$$
$$= e-\frac{e}{2}t^2+\frac{e}{6}t^4+O\left(t^5\right)$$
$$f(x) = e-\frac{e}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{e}{6}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4+O\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5\right)$$

2. $f(x)-e = -\frac{e}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{e}{6}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4+O\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5\right) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{e}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$

3. $\dfrac{f(x)-e}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{-\frac{e}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} -\dfrac{e}{2}$

Exercice 36 Calculer un développement limité à l'ordre 2 en $x=2$ de

$$f(x) = \ln x \quad et \quad g(x) = x^3-x^2-x-2$$

en déduire : $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln x - \ln 2}{x^3-x^2-x-2}$

Solution 36

On pose $t = x-2 \iff x = t+2$

$$f(x) = \ln(t+2) = \ln\left(2\left(1+\frac{t}{2}\right)\right) = \ln 2+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)$$
$$= \ln 2+\frac{t}{2}-\frac{(t/2)^2}{2}+O\left(t^3\right)$$
$$= \ln 2+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+O\left(t^3\right)$$
$$= \ln 2+\frac{x-2}{2}+\frac{(x-2)^2}{8}+O\left((x-2)^3\right)$$

On peut utiliser la même méthode ou utiliser la formule de Taylor pour $g(x)$

$$\begin{array}{ll} g(x) = x^3 - x^2 - x - 2 & g(2) = 0 \\ g'(x) = 3x^2 - 2x - 1 & g'(2) = 7 \\ g''(x) = 6x - 2 & g''(2) = 10 \\ g'''(x) = 6 & g'''(2) = 6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= g(2) + g'(2)(x-2) + \frac{g''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{g'''(2)}{3!}(x-2)^3 \\ &= 7(x-2) + 5(x-2)^2 + (x-2)^3 \\ &= 7(x-2) + 5(x-2)^2 + O\left((x-2)^3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln x - \ln 2}{x^3 - x^2 - x - 2} &= \frac{\frac{x-2}{2} + \frac{(x-2)^2}{8} + O\left((x-2)^3\right)}{7(x-2) + 5(x-2)^2 + O\left((x-2)^3\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{(x-2)}{8} + O\left((x-2)^3\right)}{7 + 5(x-2) + O\left((x-2)^3\right)} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x^3 - x^2 - x - 2} = \frac{1}{14}$$

Exercice 37 Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0, de $f(t) = \sqrt{1 + 3t + 2t^2} - 1$

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x\right)$

Solution 37

$$f(t) = \sqrt{1 + 3t + 2t^2} - 1 = 1 + \frac{1}{2}(3t) + O(t^2) - 1 = \frac{3t}{2} + O(t^2)$$

On pose $t = \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$: $t > 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x &= \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{3}{t} + 2} - \frac{1}{t} = \sqrt{\frac{1 + 3t + 2t^2}{t^2}} - \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{t}\sqrt{1 + 3t + 2t^2} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{2}(3t) + O(t^2)\right) - \frac{1}{t} \\ &= \frac{3}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x\right) = \frac{3}{2}$$

Exercice 38 :

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1 + h)^{\frac{1}{h}}$
2. En déduire le développement généralisé à l'ordre 2 de $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
3. En déduire

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)$$

Solution 38

1. Soit $y = (1+h)^{\frac{1}{h}} \Longrightarrow \ln y = \ln(1+h)^{1/h} = \frac{1}{h}\ln(1+h)$

   alors on écrit : $y = e^{\frac{\ln(1+h)}{h}}$

   $\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + O(h^4)$

   $$(1+h)^{\frac{1}{h}} = \exp\left(\frac{\ln(1+h)}{h}\right) = \exp\left(\frac{1}{h}\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + O(h^4)\right)\right)$$
   $$= \exp\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + O(h^3)\right)$$
   $$= ee^X = e\left(1 + X + \frac{X^2}{2} + O(X^3)\right)$$

   Avec $X = -\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + O(h^3)$, $X^2 = \frac{h^2}{4} + O(h^3)$

   $$(1+h)^{\frac{1}{h}} = e\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + \frac{h^2}{8} + O(h^3)\right) = e\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{11}{24}h^2 + O(h^3)\right)$$
   $$= e - \frac{e}{2}h + \frac{11e}{24}h^2 + O(h^3)$$

2. On pose $h = \frac{1}{x} \to 0$ si $x \to \infty$

   $$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = (1+h)^{\frac{1}{h}} = e - \frac{e}{2}h + \frac{11e}{24}h^2 + O(h^3)$$
   $$= e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

3. $x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)$

   $$= x^2\left[e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} - 4\left(e - \frac{e}{4x} + \frac{11e}{24\times 4x^2}\right) + 3\left(e - \frac{e}{6x} + \frac{11e}{24\times 9x^2}\right) + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$
   $$= x^2\left(\frac{11e}{72x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{11}{72}e + O(1)$$

   Donc
   $$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right) = \frac{11}{72}e$$

Exercice 39 On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}$$

1. Ecrire le développement limité généralisé de $\cos\left(\frac{1}{2x}\right)$ en $+\infty$ à l'ordre 3
2. Ecrire le développement limité généralisé de $\sqrt{2+\frac{1}{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3
3. En déduire le développement limité généralisé de $f(x)$ en $+\infty$ à l'ordre 3

4. Écrire l'équation de l'asymptote de f en $+\infty$

Solution 39

Soit $t = \dfrac{1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

1. $\cos\left(\dfrac{1}{2x}\right) = \cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + O\left(t^4\right) = 1 - \dfrac{1}{8x^2} + O\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

2. $$\sqrt{2+\frac{1}{x}} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{2x}} = \sqrt{2}\sqrt{1+t} = \sqrt{2}\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+\frac{t^3}{16}+O\left(t^4\right)\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{32x^2}+\frac{1}{128x^3}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$

3. $$\frac{\cos\left(\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}} = \frac{\cos t}{\sqrt{2}\sqrt{1+t}} = \frac{1-\frac{t^2}{2}+O\left(t^4\right)}{\sqrt{2}\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+\frac{t^3}{16}+O\left(t^4\right)\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}-\frac{t^3}{16}+O\left(t^4\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{4x}-\frac{1}{32x^2}-\frac{1}{128x^3}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$

4. L'équation de l'asymptote de f en $+\infty$ est $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 40 On considère la fonction

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+x}$$

1. Ecrire le développement limité de $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3.
2. En déduire le développement asymptotique de f à l'ordre 2 en $\pm\infty$
3. Ecrire les équations des asymptotes pour f en $\pm\infty$

Solution 40

On considère la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2+x}$.
On remarque que

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right) & si \quad x>0 \\ x\left(1-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right) & si \quad x<0 \end{cases}$$

1. Pour écrire le développement limité de $\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3 on commence par se ramener à un développement limité en 0 en posant $y = \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ il s'agit alors de calculer le développement limité de $\sqrt{1+y}$ en 0 à l'ordre 3
$\sqrt{1+y} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + O\left(y^4\right)$
d'où :
$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} \underset{\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$
2. On en déduit le développement asymptotique de f à l'ordre 2
   - en $-\infty$:
   $$f(x) = x\left(1 - \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = x\left(1 - 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{16x^3} - O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$
   $$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{8x} - \frac{1}{16x^2} - O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
   - en $+\infty$:
   $$f(x) = x\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = x\left(2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$
   $$= 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
3. On en déduit les équations des asymptotes pour f :
   - en $-\infty$: $y = -\frac{1}{2}$
   - en $+\infty$: $y = 2x + \frac{1}{2}$

Exercice 41 :

1. Ecrire le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.
2. En déduire le développement limité de $\frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de 0 , à l'ordre 3.
3. Soit $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote au graphe de f pour $x \to +\infty$.

Solution 41

1. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + O\left(x^4\right)$
2. $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^4\right)$
$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+O\left(x^4\right)}$$
$$= \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+O\left(x^4\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1+t} = \frac{1}{2}\left(1 - t + t^2 - t^3 + O\left(t^4\right)\right)$$

Avec $t = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + O\left(x^4\right)$

Comme on demande le $DL_3\left(0\right)$:

$$t^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + O\left(x^4\right)\right) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + O\left(x^4\right)$$

et $t^3 = tt^2 = \frac{x^3}{8}$

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{x^3}{8} + O\left(x^4\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + O\left(x^4\right)$$

3. On pose $X = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$f\left(x\right) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{X\left(1+e^X\right)}$$

$$= \frac{1}{X}\left(\frac{1}{2} - \frac{X}{4} + \frac{X^3}{48} + O\left(X^4\right)\right)$$

$$= x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{46x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Si $x \to +\infty$: $\frac{1}{48x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \to 0$

Donc $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ est asymptote au graphe de $f\left(x\right)$ en $+\infty$.

Exercice 42 Soit la fonction $f(x)$ definie par :

$$f\left(x\right) = \frac{x}{\ln\left(1+x\right)} - 1$$

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x)$
2. Déduire l'équation de la tangente de la fonction $h\left(x\right) = \frac{x}{\ln\left(1+x\right)}$ au point $x = 0$
3. Calculer la limite quand $x \to 0$ de la fonction : $g\left(x\right) = \frac{1}{\ln\left(1+x\right)} - \frac{1}{x}$

Solution 42

$\mathrm{f}(x) = \frac{x}{\ln\left(1+x\right)} - 1$

1. $D_f = \left]-1, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$
2. $\ln\left(1+x\right) = x - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon\left(x^3\right) \Longrightarrow \frac{x}{\ln\left(1+x\right)} - 1 = \frac{1}{2}x + \varepsilon\left(x^2\right)$

   $\lim\limits_{x\to0} f\left(x\right) = 0 \Longrightarrow \varphi\left(x\right) = \begin{cases} f\left(x\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$h(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{1}{2}x + \varepsilon(x^2) \Longrightarrow y_{\tan} = 1 + \frac{1}{2}x$$

3. $g(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}f(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{2}x + \varepsilon(x^2)\right) = \dfrac{1}{2} + \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$

Exercice 43 Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\tan 2x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x\tan 2x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x\cos x}{x - \sin x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2-1}$
7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{\sin^2 x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\cosh \dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}$
12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{7}{x}\right)^{x}$
13. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}}$
14. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$
15. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$
16. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2+x}\right)$

Solution 43

1. $\dfrac{\sin 3x}{\tan 2x} = \dfrac{3x + O(x^2)}{2x + O(x^2)} = \dfrac{3+O(x)}{2+O(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{3}{2}$
2. $\dfrac{\sin 3x}{x\tan 2x} = \dfrac{1}{x}\dfrac{3x+O(x^2)}{2x+O(x^2)} = \dfrac{1}{x}\dfrac{3+O(x)}{2+O(x)} \underset{x\to 0^{\pm}}{\longrightarrow} \pm\infty$
3. $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{1 - \left(1 - \dfrac{x^2}{2} + O(x^4)\right)}{x + O(x^2)} = \dfrac{x}{2} + O(x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$
4. $\dfrac{x - x\cos x}{x - \sin x} = \dfrac{x - x\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + O(x^4)\right)}{x - x + \dfrac{x^3}{6} + O(x^5)} = \dfrac{\dfrac{x^3}{2} + O(x^4)}{\dfrac{x^3}{6} + O(x^4)} = 3 + O(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 3$
5. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + O(x^3)$

   $e^{x^2} = 1 + x^2 + O(x^3)$

   $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + O(x^3)$

$$\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\frac{1+x^2+O\left(x^3\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}=\frac{3}{2}+O\left(x\right)$$

donc $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\frac{3}{2}$

6. $\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+O\left((x-1)^3\right)$

$$\frac{\ln x}{x^2-1}=\frac{(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+O\left((x-1)^3\right)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1-\frac{1}{2}(x-1)+O\left((x-1)^2\right)}{(x+1)}$$

donc $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x^2-1}=\frac{1}{2}$

7. $\frac{\ln x}{x^2-1}=x\frac{(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+O\left((x-1)^3\right)}{(x-1)(x+1)}=x\frac{1-\frac{1}{2}(x-1)+O\left((x-1)^2\right)}{(x+1)}$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x}{x^2-1}=\frac{1}{2}$

8. $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+O\left(x^3\right)$

$e^x-1-x=\frac{1}{2}x^2+O\left(x^3\right)$

$\sin x=x+O\left(x^3\right)$

$\sin^2 x=x^2+O\left(x^3\right)$

$$\frac{e^x-1-x}{\sin^2 x}=\frac{\frac{1}{2}x^2+O\left(x^3\right)}{x^2+O\left(x^3\right)}=\frac{1}{2}+O\left(x\right)$$

donc : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}$

9. $1-e^x=-x-\frac{1}{2}x^2+O\left(x^3\right)$

$\sin x=x+O\left(x^3\right)$

$$(1-e^x)\sin x=\left(-x-\frac{1}{2}x^2+O\left(x^3\right)\right)\left(x+O\left(x^3\right)\right)=-x^2-\frac{x^3}{2}+O\left(x^4\right)$$

$$\frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}=\frac{(1-e^x)\sin x}{x^2(1+x)}$$

$$=\frac{-x^2-\frac{x^3}{2}+O\left(x^4\right)}{x^2(1+x)}=-\frac{1-\frac{x}{2}+O\left(x^2\right)}{1+x}\underset{x\to0}{\longrightarrow}-1$$

10. $(1+x)^{1/x}=\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\exp\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+O\left(x^3\right)\right)\right)$

$$=\exp\left(1-\frac{x}{2}+O\left(x^2\right)\right)=ee^{-x/2+O\left(x^2\right)}=e\left(1-\frac{1}{2}x+O\left(x^2\right)\right)$$

$$\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=\frac{e-\frac{e}{2}x+O\left(x^2\right)-e}{x}=-\frac{e}{2}+O\left(x^2\right)\underset{x\to0}{\longrightarrow}-\frac{e}{2}$$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cosh\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$

On pose $t=\frac{1}{x^2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$

$$\left(\cosh\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=(\cosh t)^{1/t}=\exp\left(\frac{\ln(\cosh t)}{t}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} e^t &= 1+t+\frac{t^2}{2}+O\left(t^3\right) \\ e^{-t} &= 1-t+\frac{t^2}{2}+O\left(t^3\right) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2} = 1+\frac{1}{2}t^2+O\left(t^3\right)$$

$$\frac{\ln\left(\cosh t\right)}{t} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}t^2+O\left(t^3\right)\right)}{t} = \frac{1}{2}t+O\left(t^2\right)$$

$$\exp\left(\frac{\ln\left(\cosh t\right)}{t}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}t+O\left(t^2\right)\right) \underset{t\to 0}{\to} 1$$

$$\text{donc } \lim_{x\to+\infty}\left(\cosh\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = 1$$

12. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x = e^7$

$$\text{soit } t=\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\to}0 \text{ alors } y=\left(1+\frac{7}{x}\right)^x = \left(1+7t\right)^{1/t}$$

$$\ln y = \frac{1}{t}\ln\left(1+7t\right) \Longrightarrow y = e^{\frac{\ln(1+7t)}{t}}$$

$$\ln\left(1+7t\right) = 7t-\frac{49}{2}t^2+O\left(t^3\right)$$

$$\frac{\ln\left(1+7t\right)}{t} = 7-\frac{49}{2}t+O\left(t^2\right)$$

$$y = \exp\left(7-\frac{49}{2}t+O\left(t^2\right)\right) = \exp\left(7-\frac{49}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\underset{x\to+\infty}{\to} e^7$$

13. $\displaystyle f\left(x\right) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}} = \exp\left(\frac{x}{x-1}\ln\left|\frac{x+1}{2}\right|\right)$

$$\text{posons } t = x-1 \underset{x\to 1}{\to} 0$$

$$\text{on alors } \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}} = \exp\left(\frac{t+1}{t}\ln\left(\frac{t+2}{2}\right)\right) = \exp\left(\frac{t+1}{t}\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+O\left(t^3\right)$$

$$\left(\frac{t+1}{t}\right)\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) = \frac{t+1}{t}\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+O\left(t^3\right)\right) = \frac{1}{2}+\frac{3}{8}t-\frac{1}{8}t^2+O\left(t^3\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}t-\frac{1}{8}t^2+O\left(t^3\right)\right)\underset{t\to 0}{\to}\frac{1}{2} \text{ donc } \exp\left(\frac{t+1}{t}\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)\right)\underset{t\to 0}{\to} e^{1/2} = \sqrt{e}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}} = \sqrt{e}$$

14. $y = \left(\cos x\right)^{\frac{\pi}{2}-x}$

$$\text{On pose } t = \frac{\pi}{2}-x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\to} 0 \text{ alors}$$

$$y = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)^t = \left(\sin t\right)^t = \exp\left(t\ln\left(\sin t\right)\right)$$

$$\sin t = t-\frac{1}{6}t^3+O\left(t^5\right) = t\left(1-\frac{t}{6}+O\left(t^4\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\ln\left(\sin t\right) &= \ln\left(t\left(1-\frac{t}{6}+O\left(t^4\right)\right)\right) \\ &= \ln t+\ln\left(1-\frac{t}{6}+O\left(t^4\right)\right) = \ln t-\frac{1}{6}t^2+O\left(t^3\right)\end{aligned}$$

$$y = e^{t\left(\ln t-\frac{1}{6}t^2+O\left(t^3\right)\right)} = e^{t\ln t}e^{t\left(-\frac{1}{6}t^2+O\left(t^3\right)\right)}$$

$\lim_{t\to 0}(t\ln t)=0 \Longrightarrow \lim_{t\to 0} e^{t\ln t}=1$

$\lim_{t\to 0} e^{t\ln t}e^{t\left(-\frac{1}{6}t^2+O\left(t^3\right)\right)}=1$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}=1$

15. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}=\dfrac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$

$\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+O\left(x^4\right)$

$$f(x)=\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+O\left(x^4\right)-x}{x\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+O\left(x^4\right)\right)}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+O\left(x^4\right)}{x^2-\frac{1}{2}x^3+O\left(x^4\right)}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x+O\left(x^2\right)}{1-\frac{1}{2}x+O\left(x^2\right)}$$

donc $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)=-\dfrac{1}{2}$

16. Soit $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+x}$, On réécrit d'abord la fonction comme :

$$f(x)=x\left(\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^{1/3}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}\right)$$

On pose $y=\dfrac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ alors

$$f(x)=\frac{\left(1+y^2+y^3\right)^{1/3}-(1+y)^{1/2}}{y}$$

En utilisant le développement limité à l'oredre 2 de $(1+y)^{\alpha}$ en 0 :

$\left(1+y^2+y^3\right)^{1/3}=1+\dfrac{1}{3}y^2+O\left(y^3\right)$

$(1+y)^{1/2}=1+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{8}y^2+O\left(y^3\right)$

$$f(x)=\frac{\left(1+\frac{1}{3}y^2+O\left(y^3\right)\right)-\left(1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+O\left(y^3\right)\right)}{y}=-\frac{1}{2}+\frac{11}{24}y+O\left(y^2\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{11}{24}y+O\left(y^2\right)\right)=-\frac{1}{2}$$

Exercice 44 Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} 2+3x+4x^2+x^3\sin\dfrac{1}{x} & si \quad x\neq 0\\ 2 & si \quad x=0\end{cases}$$

Montrez que f admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre 2 et que, pourtant, $f''(0)$ n'existe pas.

Solution 44

On a $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ on peut écrire $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + O\left(x^3\right)$ ce qui, par définition, montre que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

D'autre part,

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 8x + 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\left(3 + 4x + x^2 \sin\frac{1}{x}\right) = 3 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Mais $f''(0)$ n'existe pas car le quotient $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 8 + 3x\sin\frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Remarque

On sait que, pour qu'une fonction admette un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, il est suffisante qu'elle soit n fois dérivable en 0. Cet exercice montre que ce n'est pas nécessaire.

Exercice 45 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ x^3 \ln|x| & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ puis $f'(0)$
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Calculer la dérivée seconde $f''(0)$ si elle existe.
5. Peut-on utiliser la formule de Taylor-Young pour écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 ? Pourquoi ?
6. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 s'il existe.

Solution 45

L'application f se réécrit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ x^3 \ln(-x) & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \sin\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to 0^-} x^3 \ln(-x) = 0$
   on a donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ alors f est continue en 0.

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \sin \dfrac{1}{x} = 0$
   et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 \ln(-x) = 0$
   la dérivée de f est

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \dfrac{1}{x} - x \cos \dfrac{1}{x} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ 3x^2 \ln(-x) + x^2 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

3. f' est continue en $x = 0$ car
   $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(3x^2 \sin \dfrac{1}{x} - x \cos \dfrac{1}{x} \right) = 0$
   $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(3x^2 \ln(-x) + x^2 \right) = 0$
   on a donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = f'(0)$
4. La dérivée seconde de f en $x = 0$ n'existe pas car
   $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(3x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} \right)$ n'existe pas.
5. On ne peut pas utiliser la formule de TAYLOR-YOUNG pour écrire le développement limité de $f$en 0 à l'ordre 2 car $f''(0)$ n'existe pas.
6. Puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \sin \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} x^3 \ln(-x) = 0$ on peut écrire $f(x) = O(x^3)$ ce qui, par définition, montre que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.