



Dérivée, différentielle et Développement limité

Exercice 1 Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en $x = 0$
2. Trouver $f'(x)$ si $x \neq 0$
3. Etudier la continuité de $f'(x)$ en $x = 0$

SOLUTION 1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\text{car on a : } -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \text{ et } -x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

Par suite f est dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 0$

$$2. \text{ pour } x \neq 0 \text{ on a } f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$3. f'(x) \text{ est continue au point } x = 0 \text{ si } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = 0 - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Cette dernière limite n'existe pas donc $f'(x)$ n'est pas continue au point $x = 0$



Exercice 2 En utilisant la définition, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = x^3$$

$$2. f(x) = \frac{1}{x}$$

$$3. f(x) = \sqrt{x}$$

$$4. f(x) = 2x^2 - x$$

$$5. f(x) = \sin 2$$

$$6. f(x) = \ln(x)$$

SOLUTION 2

$$1. f(x) = x^3 : f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + h^3 + 3hx^2 + 3h^2x - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3hx) = 3x^2$$

$$2. f(x) = \frac{1}{x} : f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-x-h+x}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$3. f(x) = \sqrt{x} : f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4. f(x) = 2x^2 - x : f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - (x+h) - 2x^2 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2h^2 + 4hx - (x+h) - 2x^2 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 4hx - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 4x - 1) = 4x - 1$$

$$5. f(x) = \sin 2x : f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2(x+h) - \sin 2x}{h}$$

$$\sin \varphi - \sin \theta = 2 \sin \frac{\varphi - \theta}{2} \cos \frac{\varphi + \theta}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(2 \sin \frac{2x+2h-2x}{2} \cos \frac{2x+2h+2x}{2} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin h \cos (2x+h)}{h} \right) = 2 \cos 2x$$

$$6. f(x) = \ln(x) : f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}$$



Exercice 3 Trouver les angles formés par l'axe Ox et les tangentes aux courbes des fonctions suivantes aux points indiqués :

$$1. y = x^2 \quad x_0 = 1 \quad x_1 = -1$$

$$2. y = \frac{1}{x} \quad x_0 = 1 \quad x_1 = 0$$

$$3. y = \sqrt{x} \quad x_0 = 1 \quad x_1 = 2$$

$$4. y = \sin x \quad x_0 = \pi/2 \quad x_1 = 0$$

SOLUTION 3

L'angle formé par l'axe Ox et la tangente sur la courbe de la fonction $f(x)$ au point x_0 est α tel que $\tan \alpha = f'(x_0)$

$$1. \quad y = x^2 \quad x_0 = 1 \quad x_1 = -1$$

$$f'(x) = 2x : \begin{cases} f'(1) = 2 \implies \alpha_0 = \arctan(2) \\ f'(-1) = -2 \implies \alpha_1 = -\arctan(2) \end{cases}$$

$$2. \quad y = \frac{1}{x} \quad x_0 = 1 \quad x_1 = 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} : \begin{cases} f'(1) = -1 = \tan \alpha \implies \alpha = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \\ f'(0) = -\infty = \tan \alpha \implies \alpha = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$3. \quad y = \sqrt{x} \quad x_0 = 1 \quad x_1 = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} : \begin{cases} f'(1) = \frac{1}{2} = \tan \alpha \\ f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$4. \quad y = \sin x \quad x_0 = \pi/2 \quad x_1 = 0$$

$$f'(x) = \cos x : \begin{cases} f'(\pi/2) = 0 \implies \alpha = 0 \\ f'(0) = 1 \implies \alpha = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



Exercice 4 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1. \quad \frac{x^5 + 2x}{x - 1}$$

$$2. \quad \frac{\sin x}{x}$$

$$3. \quad \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

$$4. \quad \sin \sqrt[3]{x^2}$$

$$5. \quad \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$6. \quad \tan(\ln(x))$$

$$7. \quad \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$8. \quad \cos\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$9. \quad \sin 3x \cos 5x^2$$

$$10. \quad \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x$$

$$11. \quad \ln(\cos x)$$

$$12. \quad \tan(e^x + \sin x)$$

SOLUTION 4

$$1. \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{x^5 + 2x}{x - 1} \right) = \frac{4x^5 - 5x^4 - 2}{(x - 1)^2}$$

$$2. \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$3. \quad \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} \right) = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$4. \quad \frac{d}{dx} \left(\sin \sqrt[3]{x^2} \right) = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x} \left(\cos \sqrt[3]{x^2} \right)$$

$$5. \quad \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right) = -\frac{1}{(x-1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

6. $\frac{d}{dx} (\tan (\ln (x))) = \frac{1 + \tan^2 (\ln x)}{x}$
7. $\frac{d}{dx} \left(\ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right) = \frac{1}{1-x^2}$
8. $\frac{d}{dx} \left(\cos \left(\frac{\ln x}{x} \right) \right) = \frac{\ln x - 1}{x^2} \left(\sin \left(\frac{1}{x} \ln x \right) \right)$
9. $\frac{d}{dx} (\sin 3x \cos 5x^2) = 3 \cos x \cos 5x^2 - 10x \sin 3x \sin 5x^2$
10. $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x \right) = \tan^4 x - 1$
11. $\frac{d}{dx} (\ln (\cos x)) = -\tan x$
12. $\frac{d}{dx} (\tan (e^x + \sin x)) = (\tan^2 (e^x + \sin x) + 1) (\cos x + e^x)$



Exercice 5 Soient $u(x)$ et $v(x)$ sont deux fonctions de la variable x .

1. Si $y = u^v$. Calculer $\ln y$, $(\ln y)'$ et démontrer que :

$$y' = vu'u^{v-1} + u^v v' \ln u$$

2. Si $y = e^u$. Démontrer que : $y' = u'e^u$

SOLUTION 5

1. $y = u^v \implies \ln y = v \ln u \implies (\ln y)' = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$
 $(\ln y)' = \frac{y'}{y} \implies y' = y (\ln y)' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = vu'u^{v-1} + u^v v' \ln u$
2. $y = e^u \implies \ln y = u \implies (\ln y)' = \frac{y'}{y} = u' \implies y' = u'y = u'e^u$



Exercice 6 Calculer les dérivées des fonctions suivantes

- | | | |
|-----------------|---|-------------------------|
| 1. $e^{\sin x}$ | 4. $x^{\ln x}$ | 7. $10^{x \tan x}$ |
| 2. x^x | 5. $(\sin x)^{\sin x}$ | 8. $\sin(\sqrt{1-2^x})$ |
| 3. $\exp(x^x)$ | 6. $\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{x}{n}}$ | 9. $a^{x \log x}$ |

SOLUTION 6

En utilisant la formule : $y' = vu'u^{v-1} + u^v v' \ln u$ on trouve :

1. $\frac{d}{dx} (e^{\sin x}) = (\cos x) e^{\sin x}$, dans ce cas $u = e = Ct^e$
2. $\frac{d}{dx} (x^x) = x^x (\ln x + 1)$
3. $\frac{d}{dx} (\exp(x^x)) = x^x (\ln x + 1) \exp(x^x)$
4. $\frac{d}{dx} (x^{\ln x}) = 2x^{\ln x - 1} \ln x$
5. $\frac{d}{dx} ((\sin x)^{\sin x}) = ((\sin x)^{\sin x}) (\ln(\sin x) + 1) \cos x$
6. $\frac{d}{dx} \left(\left(\frac{x}{n} \right)^{\frac{x}{n}} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{x}{n} \right)^{\frac{x}{n}} \left(\ln \frac{x}{n} + 1 \right)$
7. $\frac{d}{dx} (10^{x \tan x}) = (\ln 10) 10^{x \tan x} (x \tan^2 x + \tan x + x)$
8. $\frac{d}{dx} (\sin(\sqrt{1-2^x})) = -\frac{\ln 2}{2} \frac{2^x}{\sqrt{1-2^x}} (\cos \sqrt{1-2^x})$
9. $\frac{d}{dx} (a^{x \log x}) = (\ln a) (\ln x + 1) a^{x \log x}$



Exercice 7 Démontrer les formules des dérivées des fonctions trigonométriques inverses :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 2. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | <ol style="list-style-type: none"> 3. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ |
|---|--|

SOLUTION 7

1. $y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$

$$dx = \cos y dy = \sqrt{1 - \sin^2 y} dy = \sqrt{1 - x^2} dy \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{Si } y = \arcsin f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$$

2. $y = \arccos x \Rightarrow x = \cos y$

$$dx = -\sin y dy = -\sqrt{1 - \cos^2 y} dy = -\sqrt{1 - x^2} dy \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{Si } y = \arccos f(x) \Rightarrow y' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$$

3. $y = \arctan x \Rightarrow x = \tan y$

$$dx = (1 + \tan^2 y) dy = (1 + x^2) dy \Rightarrow y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\text{Dans le cas où } y = \arctan f(x) \text{ on aura } y' = \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$$



Exercice 8 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1. \arcsin \frac{x}{a}$$

$$2. \arcsin \frac{x}{x+1}$$

$$3. \arctan \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$4. \arccos e^x$$

$$5. \arctan \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

$$6. \frac{\arccos x}{x}$$

SOLUTION 8

En utilisant les formules démontrées dans l'exercice précédent on trouve

$$1. \frac{d}{dx} \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) = \frac{1/a}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$2. \frac{d}{dx} \left(\arcsin \frac{x}{x+1} \right) = \frac{\left(\frac{x}{x+1} \right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x+1} \right)^2}} = \frac{\frac{(x+1) - x}{(x+1)^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{(x+1)^2}}}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{(x+1)^2 - x^2}{(x+1)^2}}} = \frac{1}{(x+1) \sqrt{2x+1}}$$

$$3. \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{x^2}{x^2+1} \right) = \frac{\left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)'}{1 + \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^2} = \frac{\frac{2x(1+x^2) - 2x^3}{(x^2+1)^2}}{1 + \frac{x^4}{(x^2+1)^2}}$$

$$= \frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(x^2+1)^2 \left(1 + \frac{x^4}{(x^2+1)^2} \right)} = \frac{2x}{2x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$4. \frac{d}{dx} (\arccos e^x) = -\frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

$$5. \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{x+1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{x-1}{2\sqrt{x}(3x+x^2+1)}$$

$$6. \frac{d}{dx} \left(\frac{\arccos x}{x} \right) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x^2} \arccos x$$



Exercice 9 Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

$$1. y = \sin^2 x$$

$$2. y = \arctan \frac{x}{a}$$

$$3. y = \ln \frac{x+1}{x}$$

$$4. y = \sqrt[7]{x^4}$$

SOLUTION 9

La différentielle d'une fonction $f(x)$ est $df = f'(x) dx$

$$1. y = \sin^2 x \Rightarrow dy = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx$$

$$2. y = \arctan \frac{x}{a} \Rightarrow dy = \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$3. y = \ln \frac{x+1}{x} \Rightarrow dy = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\frac{x+1}{x}} dx = -\frac{1}{x^2} \frac{x}{x+1} dx = -\frac{dx}{x^2 + x}$$

$$4. y = \sqrt[7]{x^4} \Rightarrow dy = \frac{4}{7\sqrt[7]{x^3}} dx = \frac{4}{7x} \sqrt[7]{x^4} dx$$



Exercice 10 Déterminer les équations de la tangente et de la normale au point $M_0(x_0, f(x_0))$ sur les courbes suivantes, puis déduire les longueurs de la tangente, de la sous-tangente, de la normale et celle de la sous-normale.

$$1. y = x^3 - 3x^2 - x + 5; x_0 = 3$$

$$2. y = 2px^2; x_0 = 2$$

$$3. y = x \sin x; x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$4. y = \frac{1}{x}; x_0 = 1$$

SOLUTION 10

L'équation de la tangente est : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

L'équation de la normale est : $y - f(x_0) = -\frac{x - x_0}{f'(x_0)}$

Longueur de la sous-tangente : $\ell_{ST} = \left| \frac{y_0}{\tan \alpha} \right| = \left| \frac{y_0}{f'(x_0)} \right|$

Longueur de la tangente : $\ell_T = \sqrt{y_0^2 + \ell_{ST}^2} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{y_0}{f'(x_0)}\right)^2}$

longueur de la sous-normale : $\ell_{SN} = \left| \frac{y_0}{\tan \beta} \right| = |y_0 \times f'(x_0)|$

Longueur de la normale : $\ell_N = \sqrt{y_0^2 + \ell_{SN}^2} = \sqrt{y_0^2 + (y_0 f'(x_0))^2} = |y_0 \sqrt{1 + f'^2(x_0)}|$

$$1. f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5 \Rightarrow f(3) = 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 \Rightarrow f'(3) = 8$$

$$\text{Equation de la tangente : } y - 2 = 8(x - 3) \Leftrightarrow y = 8x - 22$$

$$\text{Equation de la normale : } y - 2 = -\frac{x - 3}{8}$$

$$\ell_{ST} = \left| \frac{y_0}{f'(x_0)} \right| = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\ell_T = \sqrt{y_0^2 + \ell_{ST}^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{16}} = \frac{1}{4} \sqrt{65}$$

$$l_{SN} = |y_0 \times f'(x_0)| = 2 \times 8 = 16$$

$$l_N = \sqrt{y_0^2 + l_{SN}^2} = \sqrt{4 + (16)^2} = 2\sqrt{65}$$

$$2. f(x) = 2px^2 \implies y_0 = f(2) = 8p$$

$$f'(x) = 4px \implies f'(2) = 8p$$

$$\text{Equation de la tangente : } y = 8p(x - 2) + 8p = 8px - 8p$$

$$\text{Equation de la normale : } y = -\frac{x-2}{8p} + 8p$$

$$l_{ST} = \left| \frac{y_0}{f'(x_0)} \right| = \frac{8p}{8p} = 1$$

$$l_T = \sqrt{y_0^2 + l_{ST}^2} = \sqrt{64p^2 + 1}$$

$$l_{SN} = |y_0 \times f'(x_0)| = 64p^2$$

$$l_N = \sqrt{y_0^2 + l_{SN}^2} = \sqrt{64p^2 + 64p^2} = 8\sqrt{2}p$$

$$3. f(x) = x \sin x \implies y_0 = f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x \implies f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\text{Equation de la tangente : } y = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = x$$

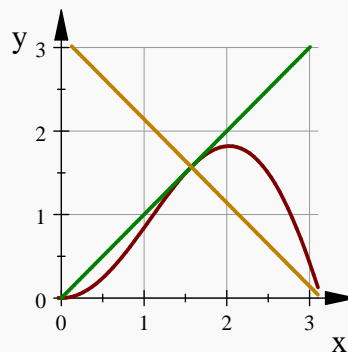
$$\text{Equation de la normale : } y = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi - x$$

$$l_{ST} = \left| \frac{y_0}{f'(x_0)} \right| = \frac{\pi}{2}$$

$$l_T = \sqrt{y_0^2 + l_{ST}^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$l_{SN} = |y_0 \times f'(x_0)| = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$l_N = \sqrt{y_0^2 + l_{SN}^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$



$$4. f(x) = \frac{1}{x} \implies f(1) = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \implies f'(1) = -1$$

$$\text{Equation de la tangente : } y = -(x - 1) + 1 = 2 - x$$

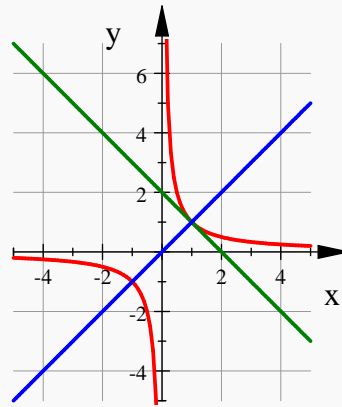
$$\text{Equation de la normale : } y = (x - 1) + 1 = x$$

$$l_{ST} = \left| \frac{y_0}{f'(x_0)} \right| = 1$$

$$l_T = \sqrt{y_0^2 + l_{ST}^2} = \sqrt{2}$$

$$l_{SN} = |y_0 \times f'(x_0)| = 1$$

$$l_N = \sqrt{y_0^2 + l_{SN}^2} = \sqrt{2}$$



Exercice 11 Utiliser le théorème de L'Hospital pour calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{ax}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x}$$

SOLUTION 11

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{ae^{ax}} = 0 \text{ pour } a > 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos 2x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 2x \sin 2x}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{\cos x} = 2$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x}{1} = \cos a$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3 \sin^2 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{(2x^2+1)}{\sqrt{(1-x^2)^5}}}{6 \cos^3 x - 12 \sin^2 x \cos x - 9 \sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}
 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 \cos 3x}{\sin 3x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x \sin x}{\cos x \sin 3x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9 \sin 3x \sin x + 3 \cos 3x \cos x}{-\sin x \sin 3x + 3 \cos x \cos 3x} = 1
 \end{aligned}$$



Exercice 12 Vérifier le théorème de Rolle pour les fonctions suivantes :

1. $y = x^2 - 3x + 2$ sur le segment $[1, 2]$
2. $y = x^3 + 5x^2 - 6x$ sur le segment $[0, 1]$
3. $y = \sin^2 x$ sur le segment $[0, \pi]$

SOLUTION 12

1. $y = x^2 - 3x + 2$ sur le segment $[1, 2]$

La fonction $y = f(x)$ est un polynôme donc elle est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} et en particulier sur $[1, 2]$

$$f(1) = f(2) = 0 \text{ et } y' = 2x - 3; y' = 0 \text{ pour } x = \frac{3}{2} \in [1, 2].$$

2. $y = x^3 + 5x^2 - 6x$ sur le segment $[0, 1]$

$$y(0) = y(1) = 0$$

$$y' = 3x^2 + 10x - 6$$

L'équation $3x^2 + 10x - 6 = 0$, admet deux racines :

$$x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{43} - \frac{5}{3} \text{ et } x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{43} - \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{43} - \frac{5}{3} = 0.51915 \in [0, 1]$$

3. $y = \sin^2 x$ sur le segment $[0, \pi]$

$$\sin^2 0 = \sin^2 \pi = 0$$

$$y' = 2 \sin x \cos x : \text{ les racines de } y' = 0 \text{ sur } [0, \pi] \text{ sont } 0, \frac{\pi}{2} \text{ et } \pi$$

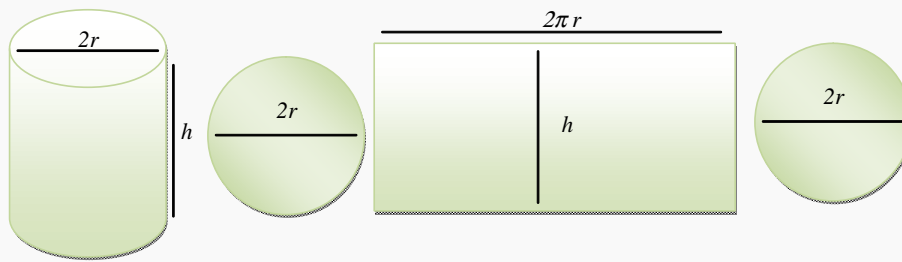


Exercice 13 On demande de fabriquer un cylindre de rayon de base r et de hauteur h dont le volume est de 1 (litre). On utilise une plaque de cuivre. Calculer les valeurs de r et h d'une façon que la quantité de matériau utilisée soit au minimum, en négligeant l'épaisseur de plaque.

SOLUTION 13

Le volume du cylindre est $V = \pi r^2 h$

Si r et h sont mesurés en cm donc $V = 11 = 1000 \text{ cm}^3$ en négligeant l'épaisseur du matériaux



Le problème, c'est de déterminer les valeurs de h et r d'une façon que la surface du cylindre soit minimale.

La surface totale à utiliser est :

$$A = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{l'aire des disques bases}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{l'aire de la surface latérale}}$$

Pour rendre A comme fonction à une variable on considère $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi r^2}$ donc $A = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ la valeurs de r à chercher est celles qui annule $\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$

$$\frac{dA}{dr} = 0 \Rightarrow 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{500}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42 \text{ cm}$$

La valeur de h correspondante est :

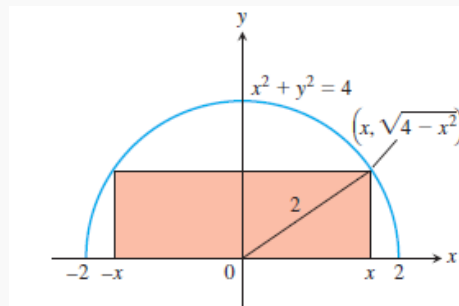
$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{2 \times 500}{\pi r^2} = \frac{2 \times r^3}{r^2} = 2r \approx 10.84 \text{ cm}$$



Exercice 14 Calculer l'aire maximale d'un rectangle inscrit dans le demi cercle supérieur ($y > 0$) d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUTION 14

rectangle inscrit dans le demi cercle supérieur : $x^2 + y^2 = 4$



Soit $M(x, \sqrt{4-x^2})$ le point où le sommet du rectangle touche le cercle, alors la longueur du rectangle est $\ell = 2x$ et sa largeur est $w = y = \sqrt{4-x^2}$. L'aire du rectangle est donc $A = 2x\sqrt{4-x^2}$ avec $x \in [0, 2]$ et $A(0) = A(2) = 0$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx} (2x\sqrt{4-x^2}) = \frac{8-4x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \rightarrow 8-4x^2 = 0 \Rightarrow x = +\sqrt{2} = 1.4142$$

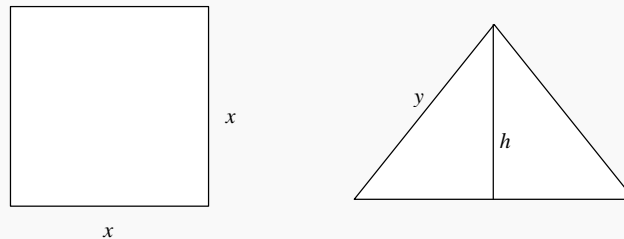
$$A = 2\sqrt{2}\sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = 4$$



Exercice 15 Un fil de longueur L est à utiliser pour faire un carré de côté x et un triangle équilatéral de côté y . Comment le fil doit être divisé pour que la somme des 2 aires du carré et du triangle soit minimale ? soit maximale ?

On rappelle qu'un triangle équilatéral a 3 côtés égaux et que l'aire d'un triangle est égale la moitié du produit de sa base et sa hauteur.

SOLUTION 15



$$L = 4x + 3y \text{ et } 0 \leq x \leq \frac{L}{4}, 0 \leq y \leq \frac{L}{3} \text{ soit } x = \frac{L-3y}{4}$$

$$\text{Surface du carré : } S_1 = x^2$$

$$\text{Surface du triangle : } S_2 = \frac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{y \times \frac{\sqrt{3}}{2}y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}y^2$$

$$S = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 = \left(\frac{L-3y}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 = \frac{(9+4\sqrt{3})y^2 - 6Ly + L^2}{16}$$

$$S' = (9+4\sqrt{3})\frac{y}{8} - \frac{3}{8}L$$

$$S' = 0 \iff y = \frac{3L}{9+4\sqrt{3}} < \frac{L}{3}$$

y	0		$\frac{3L}{9+4\sqrt{3}}$		$\frac{L}{3}$
$S'(y)$		-	0		+
$S(y)$	$\frac{L^2}{16}$	\searrow	Min	\nearrow	$\frac{L^2}{12\sqrt{3}}$

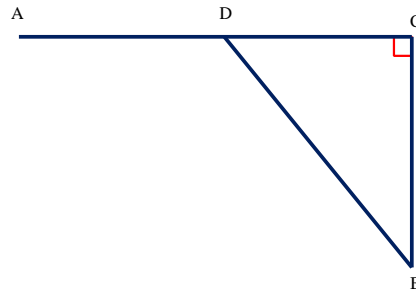
Max en $y = 0$ c'est-à-dire le fil est utilisé juste pour le carré.



Exercice 16 Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ. On connaît les distances $AC = \ell$ et $CB = d$.

On sait que le tracteur va deux fois moins vite dans le champ que sur la route.

Il quitte la route en un point D de $[AC]$ à préciser. Les trajets successifs de A à D et de D à B sont supposés rectilignes.



Déterminez le point D pour que le temps total soit minimal. Discutez suivant ℓ et d .

SOLUTION 16

Soit $DC = x$ avec $0 \leq x \leq \ell$. On a alors $AD = \ell - x$ et $DB = \sqrt{x^2 + d^2}$

Si $V_C = v$ désigne la vitesse du tracteur dans le champ, sa vitesse sur la route est donc $V_R = 2v$; et le temps total mis par le tracteur pour atteindre B est :

$$t = \frac{AD}{V_R} + \frac{DB}{V_C} = \frac{\ell - x}{2v} + \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{v}$$

On cherche l'abscisse x_0 du minimum de la fonction t sur $[0, \ell]$. On a :

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2v} + \frac{x}{v\sqrt{x^2 + d^2}}$$

$$-\frac{1}{2v} + \frac{x}{v\sqrt{x^2 + d^2}} = 0 \implies \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \iff 4x^2 = x^2 + d^2 \implies x_0 = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{dt}{dx} \geq 0 \iff 2x \geq \sqrt{x^2 + d^2}$$

– si $d \geq \sqrt{3}\ell \implies \frac{dt}{dx} \leq 0$ sur $[0, \ell]$. La fonction $t(x)$ est strictement décroissante sur $[0, \ell]$ et atteint son minimum en $x_0 = \ell$, c'est-à-dire que le tracteur quitte la route en A .

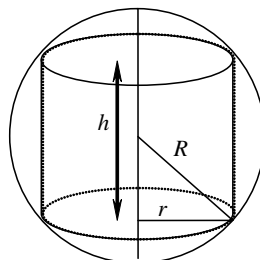
– si $0 \leq d \leq \sqrt{3}\ell$ alors $\frac{dt}{dx} < 0$ pour $0 < x < \frac{d}{\sqrt{3}}$

et $\frac{dt}{dx} > 0$ pour $\frac{d}{\sqrt{3}} < x < \ell$

La fonction t passe donc par un minimum en $x_0 = \frac{d}{\sqrt{3}}$



Exercice 17 Un cylindre de rayon r et de hauteur h , est inscrit dans une sphère de rayon R . Le milieu de l'axe du cylindre se trouve au centre de la sphère.



Trouver, en fonction de R , le rayon r et la hauteur h du cylindre de plus grand volume possible. Calculer r et h pour $R = \sqrt{3}$.

SOLUTION 17

$$\text{On a } R^2 = r^2 + (h/2)^2 \implies h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

$$V = \pi r^2 h = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$

Le plus grand cylindre correspondant au volume maximal donc pour $\frac{dV}{dr} = 0$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr} \left(2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2} \right) = 2\pi \frac{r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \implies 2R^2 - 3r^2 = 0$$

$$\implies r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$$

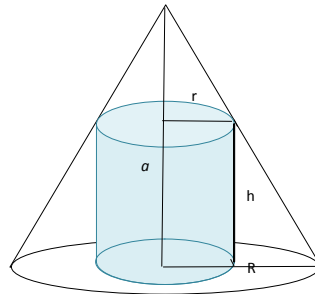
$$\text{et } h = 2\sqrt{R^2 - \frac{2}{3}R^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Pour $R = \sqrt{3}$: $r = \sqrt{2}$ et $h = 2$.



Exercice 18 Un cylindre de rayon r et de hauteur h , est inscrit dans un cône de révolution de rayon de base R et de hauteur a .

1. Trouver, en fonction de R et a , le rayon r et la hauteur h du cylindre de plus grand volume possible.
2. Calculer r et h pour $R = 60$ cm et $a = 100$ cm



SOLUTION 18

1. Le volume du cylindre est donné par $V = \pi r^2 h$.

Pour exprimer V en fonction d'une seule variable cherchons une relation entre r et h .

En utilisant la notion des triangles semblables on trouve : $\frac{r}{R} = \frac{a-h}{a}$ donc $h = a \left(1 - \frac{r}{R}\right)$

$$\implies V = \pi r^2 a \left(1 - \frac{r}{R}\right) = a\pi \left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right)$$

$$\frac{dV}{dr} = a\pi \left(2r - 3\frac{r^2}{R}\right) = 0 \longrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \frac{2}{3}R \end{cases}$$

$$\text{Volume maximal si } r = \frac{2}{3}R \longrightarrow h = a \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}a$$

$V = 0$ si $r = 0$ ou $r = R$

$$V_M = \pi \left(\frac{2}{3}R\right)^2 \left(\frac{a}{3}\right) = \frac{4\pi}{27}aR^2$$

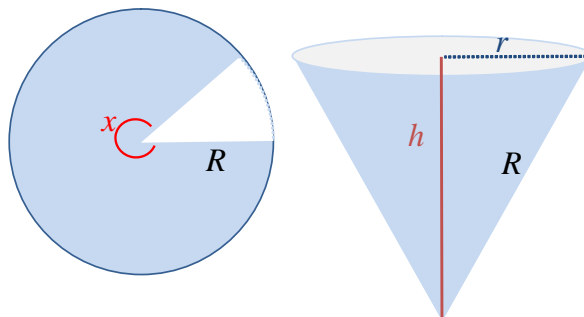
2. Pour $a = 100$ cm et $R = 60$ cm :

$$r = \frac{2}{3} \times 60 = 40 \text{ cm} \quad h = \frac{100}{3}$$

$$V = \pi (40)^2 \times \frac{100}{3} = \frac{160\,000}{3} \pi \text{ cm}^3$$



Exercice 19 Dans un disque de papier de rayon R , on découpe un secteur angulaire d'angle x radians ($x \in [0, 2\pi]$), avec lequel on confectionne un cornet de frites conique. Déterminer x pour que le volume du cornet soit maximal.



Le rayon r de la section du cône est tel que : $2\pi r = Rx$ et le volume du cône est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

SOLUTION 19

On a $2\pi r = Rx$ d'où $r = \frac{Rx}{2\pi}$

La hauteur h du cône est telle que : $h^2 + r^2 = R^2$ d'où

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

Le volume du cône est donc :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2 \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{R^3 x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

La fonction $V = V(x)$ est continue sur $[0, 2\pi]$. Elle admet donc sur ce segment un maximum, qui est strictement positif (car $V(\pi) > 0$).

La fonction V est dérivable sur $[0, 2\pi[$, et :

$$V'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{R^3 x^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - x^2} \right) = \frac{R^3}{24\pi^2} x \frac{(8\pi^2 - 3x^2)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$$

$$V_{\max} \rightarrow \frac{dV}{dx} = 0$$

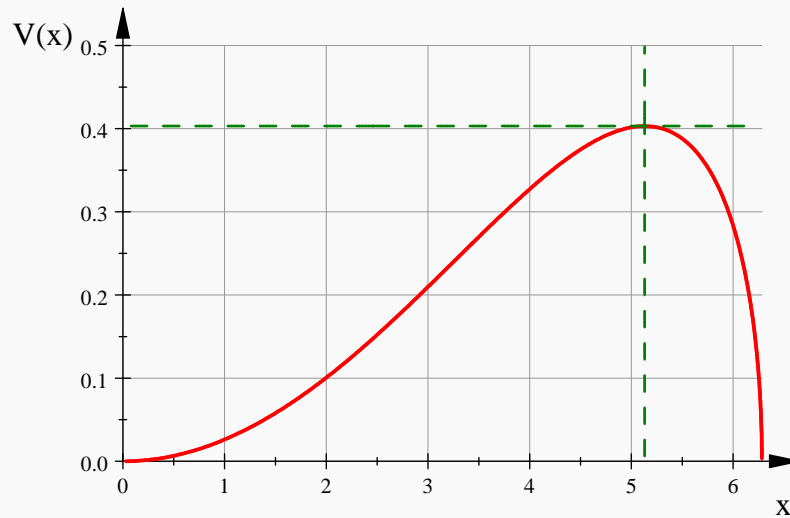
Cette dérivée s'annule pour $x = 0$ et $x = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Comme $V(0) = V(2\pi) = 0$, le maximum de la fonction V sur $[0, 2\pi]$ ne peut être atteint qu'en

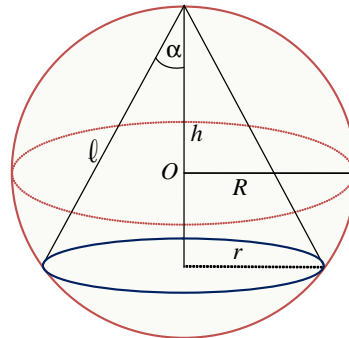
$$x = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

La valeur de ce maximum est

$$V_{\max} = \frac{R^3}{24\pi^2} \left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^2 \sqrt{4\pi^2 - \left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{27} \pi R^3$$



Exercice 20 On considère la sphère Σ de centre O et de rayon $R = 1$. On voudrait mettre à l'intérieur de Σ la partie principale d'un cône, dont le sommet est le pôle nord de Σ . On suppose que le rayon de base du cône est r , sa hauteur est $h \in [1, 2]$ et sa directrice est de longueur ℓ . On rappelle que l'aire d'un tel cône est $S = \pi r \ell$ et le volume est $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. L'objectif de cet exercice est de mettre un cône de surface maximale dans la sphère



1. Montrer que $r^2 = 2hR - h^2$ où $R = 1$ est le rayon de la sphère.
2. Dédire que $S^2 = 2\pi^2(2h^2 - h^3)$.
3. Quels doivent être h, r et ℓ si S est maximale ?
4. Les valeurs ainsi trouvées de h et r , correspondent -ils à un volume maximal du domaine intérieur au cône ? Justifier !
5. Trouver l'aire maximale du cône qu'on peut insérer dans la sphère.

SOLUTION 20

1. On a $\cos \alpha = \frac{\ell/2}{R} = \frac{h}{\ell} \implies \ell^2 = 2hR$

Dans une section plane du cône :

$$\ell^2 = h^2 + r^2 \implies r^2 = \ell^2 - h^2 = 2hR - h^2 = 2h - h^2$$

$$2. S = \pi r \ell \implies S^2 = \pi^2 r^2 \ell^2 = \pi^2 (2h - h^2) (2h) = 2\pi^2 (2h^2 - h^3)$$

$$3. S_{\max} \rightarrow \frac{dS}{dh} = 0 \implies \frac{d}{dh} (2\pi^2 h^2 (2 - h)) = 2\pi^2 (4h - 3h^2) = 0 \implies h = \frac{4}{3} \rightarrow S_{\max}$$

$$r = \sqrt{2h - h^2} = \sqrt{2 \left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\ell^2 = 2hR = 2h \implies \ell = \sqrt{2h} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$4. V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} (2h^2 - h^3)$$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3} (4h - 3h^2) = 0 \implies h = \frac{4}{3} \rightarrow V_{\max}$$

$$5. S_{\max} = \pi r \ell = \pi \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \text{ unité de surface.}$$



Exercice 21 Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = x - x^3$ sur l'intervalle $[-2, 1]$ en précisant la valeur de c .

SOLUTION 21

Le polynôme f vérifie bien entendu les hypothèses du théorème, avec $f(-2) = 6$ et $f(1) = 0$, $f'(x) = 1 - 3x^2$, la valeur de c doit vérifier : $-6 = 3(1 - 3c^2)$ soit $c^2 = 1$ de solution unique $c = -1$ sur $] -2, 1[$.



Exercice 22 On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x}; x \in [a, b]$, avec $0 < a < b < \infty$ montrer que, pour tout $h \in]0, b - a[$, il existe un unique θ vérifiant

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h) \quad (E)$$

(les valeurs de a et b étant fixés). On note θ_h cette valeur de θ . Calculer θ_h (en fonction de a et h déterminer $\lim_{h \rightarrow 0^+} \theta_h$)

SOLUTION 22

Soit $\theta \in]0, 1[$ vérifiant

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h)$$

- l'existence d'au moins un θ est donnée par le TAF, on veut montrer ici son unicité et on cherche la limite de θ quand $h \rightarrow 0^+$.



Exercice 23 On veut étudier les sommes

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En utilisant la formule des accroissements finis pour la fonction $\ln x$, montrer que pour tout $x > 0$ on a

$$\frac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

2. Soit n un entier au moins égal à 2.
Écrire cet encadrement pour $x = 1, x = 2, \dots, x = n - 1$. En déduire que l'on a :

$$S_n - 1 < \ln n < S_{n-1}$$

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$

SOLUTION 23

1. La dérivée de $\ln x$ est $\frac{1}{x}$. Pour tout $x > 0$, il existe un nombre c tel que $x < c < x + 1$

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c} ((x+1) - x) = \frac{1}{c}$$

Puisque $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ on en déduit $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$

2. Écrivons cet encadrement pour différentes valeurs de x :

$$\begin{array}{rcl} x = 1 & & \frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1} \\ x = 2 & & \frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x = n - 1 & & \frac{1}{n} < \ln n - \ln(n - 1) < \frac{1}{n - 1} \end{array}$$

et ajoutons ces inégalités : la plupart des termes $\ln k$ se simplifient et il reste

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n - \ln 1 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n - 1}$$

c'est-à-dire : $S_n - 1 < \ln n < S_{n-1}$.

3. Puisque $S_1 = 1$, l'inégalité $S_n \leq 1 + \ln n$ est vraie pour tout $n \geq 1$, on a $\ln n < S_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$, donc on a $\ln(n + 1) < S_n$ pour tout $n \geq 1$. Puisque $1 + \ln n$ et $\ln(n + 1)$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Pour tout $n \geq 2$, en divisant par $\ln n > 0$ dans l'encadrement précédent, il vient

$$\frac{\ln(n + 1)}{\ln n} < \frac{S_n}{\ln n} < \frac{1}{\ln n} + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n + 1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln n} + 1 \right) = 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$$



Exercice 24 Calculer les développements limités suivants au point 0, à l'ordre n :

- | | | |
|-------------------------------------|--|--|
| 1. $\frac{1}{1-x} - e^{-x}, n = 3$ | 6. $\ln^2(1+x), n = 3$ | 10. $\frac{1}{1+x+x^2}, n = 4$ |
| 2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}, n = 3$ | 7. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right), n = 4$ | 11. $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}, n = 4$ |
| 3. $\sin x \cos 2x, n = 3$ | 8. $e^{\sin x}, n = 4$ | 12. $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}, n = 2$ |
| 4. $\cos x \ln(1+x), n = 3$ | 9. $(\cos x)^{\sin x}, n = 4$ | |
| 5. $(1+x^3)\sqrt{1-x^2}, n = 3$ | | |

SOLUTION 24

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^4)$
 $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$
 $\frac{1}{1-x} - e^{-x} = (1 + x + x^2 + x^3 + O(x^4)) - \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)\right)$
 $(1 + x + x^2 + x^3) - \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) = 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + O(x^4)$
2. $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + O(x^4)$
 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + O(x^4)$

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{1}{4}x^2 + O(x^4)$$

$$3. \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$$

$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + O(x^4)$$

$$\sin x \cos 2x = \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) (1 - 2x^2) = x - \frac{13}{6}x^3 + O(x^4)$$

$$4. \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$$

$$\cos x \ln(1+x) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

$$5. \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$$

$$(1+x^3)\sqrt{1-x^2} = (1+x^3) \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3 + O(x^4)$$

$$6. \ln^2(1+x) = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^2 = x^2 - x^3 + O(x^4)$$

$$7. \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + O(x^5)$$

On pose $u = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + O(x^6)$ alors

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + O(u^3)$$

$$= \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4\right)^2$$

$$= -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + O(x^6)$$

$$8. \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^7)$$

On pose $u = x - \frac{1}{6}x^3$

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + O(u^5)$$

Soit donc $u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^4)$, $u^3 = x^3 + O(x^4)$, $u^4 = x^4 + O(u^5)$

$$1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^5)$$

$$9. (\cos x)^{\sin x} = \exp(\sin x \ln(\cos x))$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6) \quad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$$

on pose $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

alors $\ln(\cos x) = \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + O(u^5)$

On demande le développement à l'ordre 5 donc

$$u^2 = \frac{1}{4}x^4 + O(x^5) \quad u^3 = u^4 = O(x^5)$$

$$\ln(\cos x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^5)\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x^4 + O(x^5)\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + O(x^5)$$

$$\begin{aligned} \sin x \ln(\cos x) &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)\right) \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + O(x^5)\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^3 + O(x^5) \end{aligned}$$

$$\text{soit } y = -\frac{1}{2}x^3 + O(x^5)$$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + O(y^5)$$

$$(\cos x)^{\sin x} = \exp(\sin x \ln(\cos x)) = 1 - \frac{1}{2}x^3 + O(x^5)$$

10. On peut chercher le $DL_4(0)$ de $F(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ par différentes méthodes, voici trois méthodes :

(a) On pose $u = x + x^2$ donc $F(x) = \frac{1}{1+u}$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + O(u^6)$$

$$= 1 - (x + x^2) + (x + x^2)^2 - (x + x^2)^3 + (x + x^2)^4$$

en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4, on trouve :

$$F(x) = 1 - x + x^3 - x^4 + O(x^5)$$

(b) $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x) = 1$ et $g(x) = 1 + x + x^2$

on pose la division suivant les puissances croissantes, en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4 :

1					1 + x + x ²
-1	-x	-x ²			
	-x	-x ²			
	x	x ²	x ³		
			x ³		
			-x ³	-x ⁴	-x ⁵
				-x ⁴	-x ⁵
				x ⁴	x ⁵
					O(x ⁶)

(c) On propose que $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + O(x^5)$

$$\text{donc } \frac{1}{1+x+x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + O(x^5)$$

$$1 = (1+x+x^2)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + O(x^5))$$

$$= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_1 + a_2 + a_3)x^3 + (a_2 + a_3 + a_4)x^4 + (a_3 + a_4)x^5$$

Par identification on trouve :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_0 + a_1 = 0 \implies a_1 = -a_0 = -1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \implies a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \implies a_3 = -a_1 = 1 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 0 \implies a_4 = -a_3 = -1 \\ a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 1 - x + x^3 - x^4 + O(x^5)$$

$$11. F(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$$

$$\sin x - 1 = -1 + x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$$

$$\cos x + 1 = 2 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4) = 2 \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) + O(x^5)$$

$$\text{On pose } u = \frac{1}{4}x^2$$

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + O(u^5) = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 + \left(\frac{1}{4}x^2\right)^3 + O(u^5)$$

$$\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + O(x^5)$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(-1 + x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + O(x^5)\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{48}x^4 + O(x^5) \end{aligned}$$

Remarque

On peut faire la division suivant les puissances croissantes, en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4

$$12. F(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) = x \left(1 - \frac{1}{6}x^2\right) + O(x^4)$$

$$\text{On pose } u = \frac{1}{6}x^2$$

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + O(u^3)$$

$$\frac{1}{(1-x^2/6)} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + O(x^3)$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + O(x^3)$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + O(x^3)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) \end{aligned}$$



Exercice 25 Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

de trois façons :

1. par la formule de Taylor-Young
2. par composition de développements limités
3. en commençant par calculer le développement limité de f' .

SOLUTION 25

1. Pour utiliser la formule de Taylor-Young on doit d'abord calculer les dérivées de f jusqu'à l'ordre 3 en 0 :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right) \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x+2}\right)^2} \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{2x+2}{(x^2 + 2x + 2)^2} \quad f''(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = 2 \frac{3x^2 + 6x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^3} \quad f'''(0) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + O(x^4) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + O(x^4)$$

2. On a $\arctan u = u - \frac{u^3}{3!} + O(u^4)$

avec $u = \frac{x}{x+2}$ on trouve

$$f(x) = \frac{x}{x+2} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{x+2}\right)^3 + O(x^4)$$

$$= \frac{x}{x+2} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{x+2}\right)^3 = 2x \frac{x^2 + 6x + 6}{3(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)} + O(x^4)$$

En effectuant la division selon les puissances croissantes et en s'arrêtant à $O(x^3)$ car le résultat sera multiplié par x on a

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 6 \quad +6x \quad +x^2 \quad +O(x^3) \\ -6 \quad -6x \quad -\frac{9}{2}x^2 \quad +O(x^3) \\ \hline -3x \quad -\frac{7}{2}x^2 \quad +O(x^3) \\ \hline 3x \quad +\frac{9}{2}x^2 \quad +O(x^3) \\ \hline \quad x^2 \quad +O(x^3) \\ \hline \quad -x^2 \quad +O(x^3) \\ \hline \quad \quad +O(x^3) \end{array} & \begin{array}{l} 8 + 12x + 6x^2 + x^3 \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}x^2 \end{array} \end{array}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}x^2\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + O(x^4)$$

3. $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + O(x^3)$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + O(x^4)$$



Exercice 26 Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 + \sin^2 x)$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{2x^2}$

SOLUTION 26

Étant donné que : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^4)$

$$\sin^2 x = x^2 + O(x^4)$$

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \dots$$

$$\text{Alors } \ln(1 + \sin^2 x) = x^2 + O(x^4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + O(x^4)}{2x^2} = \frac{1}{2}$$



Exercice 27 Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 - x \cos^2 x)$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x \cos^2 x)}{3x}$.

SOLUTION 27

On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$

alors $\cos^2 x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)^2 = 1 - x^2 + O(x^4)$ et $x \cos^2 x = x - x^3 + O(x^4)$

comme le développement limité de $\ln(1 - u)$ en $u = 0$ est

$$\ln(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \dots - \frac{u^n}{n} + O(u^{n+1})$$

on conclut que

$$\ln(1 - x \cos^2 x) = -x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + O(x^4)$$

$$\text{et } \frac{\ln(1 - x \cos^2 x)}{3x} = \frac{-x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3}{3x} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}x + \frac{2}{9}x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x \cos^2 x)}{3x} = -\frac{1}{3}$$



Exercice 28 Soit la fonction pour tout définie par

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$$

1. Déterminer le développement limité de $f(x)$, à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe.
3. Déterminer une équation de l'asymptote en $+\infty$ ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

SOLUTION 28

1. Soit $u = x + x^2$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + O(u^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x+x^2) - \frac{1}{8}(x+x^2)^2 + O(u^3) \end{aligned}$$

en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x+x^2) - \frac{1}{8}(x^2) + O(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + O(x^3) \end{aligned}$$

2. Une équation de la tangente en $x = 0$ est $y = 1 + \frac{1}{2}x$

$$f(x) - \left(1 + \frac{1}{2}x\right) = \frac{3}{8}x^2 + O(x^3)$$

Cette expression est positive dans un voisinage de 0 donc la courbe est au-dessus de la tangente dans un voisinage de 0.

3. On pose $X = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}} = \sqrt{\frac{X^2 + X + 1}{X^2}} = \frac{\sqrt{X^2 + X + 1}}{|X|} = \frac{\sqrt{X^2 + X + 1}}{X} \quad \text{car } X > 0$$

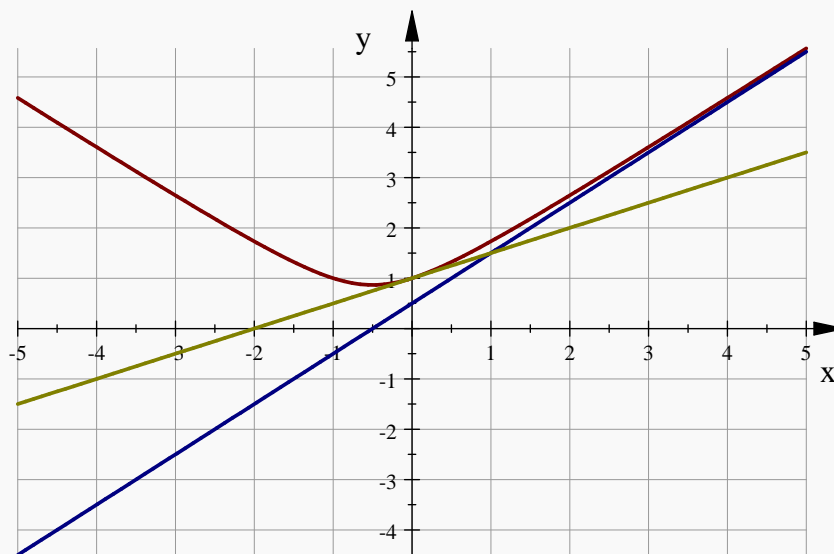
En utilisant le développement limité du (1). on en déduit que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{X} \left(1 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}X^2 + O(X^3)\right) = \frac{1}{X} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}X + O(X^2) \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Une équation de l'asymptote en $+\infty$ est $y = x + \frac{1}{2}$

$$f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Cette expression est positive lorsque $x \rightarrow +\infty$ donc la courbe est au-dessus de l'asymptote en $+\infty$



Exercice 29 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R} : \text{où } D =]-1, 1[\cup]1, +\infty[$, définie pour tout $x \in D$ par :

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

1. Donner le développement limité de f , à l'ordre 3, dans un voisinage de 0.
En déduire que le graphe de $f(x)$ admet une tangente (T) au point d'abscisse $x = 0$.
Donner une équation cartésienne de (T) et préciser la position du graphe par rapport à (T).
2. En utilisant un développement asymptotique de $f(x)$ en $+\infty$, démontrer que le graphe de admet une asymptote (A)
Donner une équation cartésienne de (A) et préciser la position du graphe de par rapport à (A).

SOLUTION 29

$$\begin{aligned} 1. f(x) &= (x^2 - 1) (\ln |1+x| - \ln |1-x|) \\ &= (x^2 - 1) \left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4) \right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + O(x^4) \right) \right) \\ &= (x^2 - 1) \left(2x + \frac{2}{3}x^3 + O(x^4) \right) \\ &= -2x + \frac{4}{3}x^3 + O(x^4) \end{aligned}$$

Une équation de la tangente en $x = 0$ est $y = -2x$

$$f(x) - (-2x) = \frac{4}{3}x^3 + O(x^4) \text{ est du signe de } \frac{4}{3}x^3$$

- Si $x > 0$ la tangente est au dessous de la courbe.
- Si $x < 0$ la tangente est au dessus de la courbe.

2. Soit $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ si $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) \ln \left| \frac{1 + \frac{1}{t}}{1 - \frac{1}{t}} \right| = \frac{1-t^2}{t^2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \\ &= \frac{1-t^2}{t^2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \\ &= -\frac{1}{t^2} \left((t^2-1) \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \right) \\ &= -\frac{1}{t^2} \left(-2t + \frac{4}{3}t^3 + O(t^4) \right) \\ &= \frac{2}{t} - \frac{4}{3}t + O(t^2) \end{aligned}$$

$$\text{Alors } f(x) = 2x - \frac{4}{3x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(x) - 2x = -\frac{4}{3x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe

$(f(x) - 2x)$ est strictement négatif lorsque $x \rightarrow +\infty$ la courbe est au dessus de l'asymptote.



Exercice 30 Soit $f :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

1. Déterminer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
3. Déterminer alors l'équation de la tangente en 0 et étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.

SOLUTION 30

1. $\ln(1+x) - x$ est divisée par x^2 , alors on calcule le $DL_4(0)$ de f

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O(x^5)$$

$$\ln(1+x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O(x^5)$$

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O(x^5)}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + O(x^3)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + O(x^3) \right) = -\frac{1}{2}$$

$f(x)$ est prolongeable par continuité en 0, soit $g(x)$ ce prolongement :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + O(x^3) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + O(x^2) \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

donc $g(x)$ est alors dérivable en 0.

3. $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + O(x^3)$

l'équation de la tangente en 0 est $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$

$$f(x) - y = -\frac{1}{4}x^2 + O(x^3)$$

$-\frac{1}{4}x^2$ est négative $\forall x$, donc la courbe de f est au dessous de la tangente.



Exercice 31 Soit la fonction

$$f(x) = \frac{e^x \sin x - \ln(1+x)}{x^2}.$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que le prolongement de f est dérivable en 0.

SOLUTION 31

$$f(x) = \frac{e^x \sin x - \ln(1+x)}{x^2}$$

1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}x^2 + x^2 O(x) \right) = \frac{3}{2}$

$f(x)$ n'est pas définie en $x = 0$, mais sa limite existe en ce point. donc f est prolongeable par continuité en 0.

Son prolongement est donné par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{3}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{3}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}x^2 + x^2 O(x) - \frac{3}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^2 + x^2 O(x)}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4}x + x O(x) \right) = 0.$

Donc le prolongement de f est dérivable en 0.



Exercice 32 Calculer les développements limités de $f(x)$ au point x_0 à l'ordre n , dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x}; n = 3, x_0 = 2$
2. $f(x) = x^3; n = 4; x_0 = -2$
3. $f(x) = x^4 + 1; n = 4; x_0 = 1$
4. $f(x) = \sin x; n = 3; x_0 = \frac{\pi}{3}$

5. $f(x) = \ln x, n = 4, x_0 = 1$
6. $f(x) = \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}, n = 2, x_0 = 1$

SOLUTION 32

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

1. ici on peut utiliser aussi une autre méthode.

On pose $h = x - 2$ alors $f(x) = \sqrt{x} = \sqrt{2+h} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{h}{2}}$

Comme $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + \dots + O(u^{n+1})$

avec $u = \frac{h}{2}$ on aura : $\sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{h}{2}} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{32} + \frac{h^3}{128} + O(h^4) \right)$

d'où :

$$f(x) = \sqrt{2} \left(1 + \frac{x-2}{4} - \frac{(x-2)^2}{32} + \frac{(x-2)^3}{128} + O((-2)^4) \right)$$

2. $f(x) = x^3$ $f(-2) = -8$
 $f'(x) = 3x^2$ $f'(-2) = 12$
 $f''(x) = 6x$ $f''(-2) = -12$
 $f'''(x) = 6$ $f'''(-2) = 6$

Alors :

$$f(x) = -8 + 12(x+2) - 6(x+2)^2 + (x+2)^3 + O((x+2)^4)$$

3. $f(x) = x^4 + 1$ $f(1) = 2$
 $f'(x) = 4x^3$ $f'(1) = 4$
 $f''(x) = 12x^2$ $f''(1) = 12$
 $f'''(x) = 24x$ $f'''(1) = 24$
 $f^{(4)}(x) = 24$ $f^{(4)}(x) = 24$

donc :

$$x^4 + 1 = 2 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4 + O((x-1)^5)$$

4. $f(x) = \sin x$ $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $f'(x) = \cos x$ $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$f''(x) = -\sin x \quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}(x - \frac{\pi}{3})^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}(x - \frac{\pi}{3})^3 + O\left((x - \frac{\pi}{3})^4\right)$$

Finalemment :

$$f(x) = \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right)$$

5. $f(x) = \ln x \quad f(1) = \ln 1 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f'''(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \quad f^{(4)}(1) = -6$$

En appliquant la formule de Taylor on trouve :

$$\ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 + O\left((x - 1)^5\right)$$

6. $f(x) = \frac{\ln(x)}{(1+x)^2} \quad f(1) = 0$

$$f'(x) = \frac{x+1-2x \ln x}{x(x+1)^3} \quad f'(1) = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x-2x \ln x + 1}{x(x+1)^3} \right) = -\frac{5x^2 + 6x + 1 - 6x^2 \ln x}{x^2(x+1)^4} \quad f''(1) = \frac{3}{4}$$

En appliquant la formule de Taylor on trouve :

$$\frac{\ln(x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{8}(x-1)^2 + O\left((x-1)^3\right)$$

Remarque

On peut aussi utiliser un changement de variable : on pose $y = x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$

donc : $(x = y + 1)$

$$f(x) = \frac{\ln(1+y)}{(2+y)^2} = \frac{\ln(1+y)}{4\left(1+\frac{y}{2}\right)^2}$$

$$\ln(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + O(y^3)$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^2} = 1 - y + \frac{3}{4}y^2 + O(y^3)$$

$$\frac{\ln(1+y)}{4\left(1+\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{2}y^2 + O(y^3)\right)\left(1 - y + \frac{3}{4}y^2 + O(y^3)\right)$$

$$= \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}y^2 + O(y^3) = \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{8}(x-1)^2 + O\left((x-1)^3\right)$$



Exercice 33 Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3

2. $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ en $+\infty$ et $-\infty$ à l'ordre 1

3. $e^{2/x}$ en $+\infty$ à l'ordre 3

4. $e^{-1/x}$ en $-\infty$ à l'ordre 3

5. $\frac{x^2-x}{1+x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2

6. $\frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{2-x+x^2}}{x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2

SOLUTION 33

Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) en posant $x = \frac{1}{t}$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.

1. On pose $u = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} &= \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{1 + 2u} \\ &= 1 + \frac{2u}{2} - \frac{(2u)^2}{8} + \frac{(2u)^3}{16} + O(u^4) \\ &= 1 + u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u^3 + O(u^4) \\ &= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right) \end{aligned}$$

2. On pose $y = \frac{1}{x}$

- en $+\infty$: $y \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+$

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \frac{1/y}{1/y-1} \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} = \frac{1}{1-y} \sqrt{\frac{1+y^2}{y^2}} \stackrel{y>0}{=} \frac{\sqrt{1+y^2}}{y(1-y)}$$

$$\sqrt{1+y^2} = 1 + \frac{1}{2}y^2 + O(y^3)$$

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + O(y^3)$$

$$\frac{\sqrt{1+y^2}}{y(1-y)} = \frac{1}{y} (1 + y + y^2 + O(y^3)) \left(1 + \frac{1}{2}y^2 + O(y^3)\right)$$

$$\frac{\sqrt{1+y^2}}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + 1 + \frac{3}{2}y + O(y^2)$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On en déduit que le graphe de la fonction admet la droite d'équation $y = x + 1$ comme asymptote en $+\infty$

- en $-\infty$: $y \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0^-$

$$f(x) = \frac{1/y}{1/y-1} \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} = \frac{1}{1-y} \sqrt{\frac{1+y^2}{y^2}} \stackrel{y<0}{=} -\frac{\sqrt{1+y^2}}{y(1-y)}$$

$$= -\left(x + 1 + \frac{3}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -x - 1 - \frac{3}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On en déduit que le graphe de la fonction admet la droite d'équation $y = -x - 1$ comme asymptote en $-\infty$.

3. Soit $t = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$$\begin{aligned} e^{2/x} &= e^{2t} = 1 + 2t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 + O(t^4) \\ &= 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right) \end{aligned}$$

4. Soit $t = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

$$\begin{aligned} e^{-1/x} &= e^{-t} = 1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + O(t^4) \\ &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right) \end{aligned}$$

5. On pose $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x}{1 + x} &= \frac{1/y^2 - 1/y}{1 + 1/y} = -\frac{1 - y}{y^2 + y} = \frac{1 - y}{y(y + 1)} \\ \frac{1}{y + 1} &= 1 - y + y^2 - y^3 + O(y^4) \\ \frac{1 - y}{y(y + 1)} &= \frac{1}{y} (1 - y) (1 - y + y^2 - y^3 + O(y^4)) \\ &= \frac{1}{y} - 2 + 2y - 2y^2 + y^3 + O(y^4) \\ &= x - 2 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right) \end{aligned}$$

6. On pose $t = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{3 + x + x^2} - \sqrt{2 - x + x^2}}{x} = t \left(\sqrt{3 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} - \sqrt{2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3t^2 + t + 1} - \sqrt{2t^2 - t + 1}}{t} \\ &= \frac{\sqrt{1 - (-t - 3t^2)} - \sqrt{1 - (t - 2t^2)}}{t} \\ \sqrt{1 - (-t - 3t^2)} &= 1 + \frac{1}{2}t + \frac{11}{8}t^2 + O(t^3) \\ \sqrt{1 - (t - 2t^2)} &= 1 - \frac{1}{2}t + \frac{7}{8}t^2 + O(t^3) \\ f(x) &= \left(1 + \frac{1}{2}t + \frac{11}{8}t^2 + O(t^3) \right) - \left(1 - \frac{1}{2}t + \frac{7}{8}t^2 + O(t^3) \right) \\ &= t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$



Exercice 34 Déterminer le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 1 de la fonction définie par :

$$f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$$

SOLUTION 34

On pose $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1$

$$f(x) = x^{\frac{1}{x-1}} = (1+t)^{1/t} = \exp\left(\frac{\ln|1+t|}{t}\right)$$

$$\frac{\ln|1+t|}{t} = \frac{t - \frac{t^2}{2} + O(t^3)}{t} = 1 - \frac{t}{2} + O(t^2)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{1 - \frac{t}{2} + O(t^2)} = ee^{\frac{-t}{2} + O(t^2)} = e\left(1 - \frac{t}{2} + O(t^2)\right) \\ &= e\left(1 - \frac{x-1}{2} + O((x-1)^2)\right) \end{aligned}$$

$$f(x) = e - \frac{e}{2}(x-1) + O((x-1)^2)$$



Exercice 35 Soit

$$f(x) = e^{\sin x}$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de $f(x)$.
2. Donner un équivalent de $f(x) - e$ en $\frac{\pi}{2}$.
3. En déduire $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x} - e}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$

SOLUTION 35

On pose $t = x - \frac{\pi}{2}$ alors $x = t + \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} 1. \quad e^{\sin x} &= e^{\sin(t + \frac{\pi}{2})} = e^{\cos t} = e^{1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + O(t^5)} = ee^{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + O(t^5)} \\ &= e\left(1 + \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right)^2\right) \\ &= e\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \frac{1}{2}\left(\frac{t^4}{4}\right) + O(t^5)\right) \\ &= e\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6} + O(t^5)\right) = e - \frac{e}{2}t^2 + \frac{e}{6}t^4 + O(t^5) \\ &= e - \frac{e}{2}t^2 + \frac{e}{6}t^4 + O(t^5) \end{aligned}$$

$$f(x) = e - \frac{e}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{e}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$$

$$2. \quad f(x) - e = -\frac{e}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{e}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\right) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{e}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$3. \quad \frac{f(x) - e}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{-\frac{e}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\frac{e}{2}$$



Exercice 36 Calculer un développement limité à l'ordre 2 en $x = 2$ de

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 - x^2 - x - 2$$

en déduire : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x^3 - x^2 - x - 2}$

SOLUTION 36

On pose $t = x - 2 \iff x = t + 2$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(t+2) = \ln\left(2\left(1 + \frac{t}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right) \\ &= \ln 2 + \frac{t}{2} - \frac{(t/2)^2}{2} + O(t^3) \\ &= \ln 2 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + O(t^3) \\ &= \ln 2 + \frac{x-2}{2} + \frac{(x-2)^2}{8} + O((x-2)^3) \end{aligned}$$

On peut utiliser la même méthode ou utiliser la formule de Taylor pour $g(x)$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 - x^2 - x - 2 & g(2) &= 0 \\ g'(x) &= 3x^2 - 2x - 1 & g'(2) &= 7 \\ g''(x) &= 6x - 2 & g''(2) &= 10 \\ g'''(x) &= 6 & g'''(2) &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= g(2) + g'(2)(x-2) + \frac{g''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{g'''(2)}{3!}(x-2)^3 \\ &= 7(x-2) + 5(x-2)^2 + (x-2)^3 \\ &= 7(x-2) + 5(x-2)^2 + O((x-2)^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln x - \ln 2}{x^3 - x^2 - x - 2} &= \frac{\frac{x-2}{2} + \frac{(x-2)^2}{8} + O((x-2)^3)}{7(x-2) + 5(x-2)^2 + O((x-2)^3)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{(x-2)}{8} + O((x-2)^2)}{7 + 5(x-2) + O((x-2)^2)} \\ \implies \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x^3 - x^2 - x - 2} &= \frac{1}{14} \end{aligned}$$



Exercice 37 Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0, de $f(t) = \sqrt{1 + 3t + 2t^2} - 1$
Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$

SOLUTION 37

$$f(t) = \sqrt{1 + 3t + 2t^2} - 1 = 1 + \frac{1}{2}(3t) + O(t^2) - 1 = \frac{3t}{2} + O(t^2)$$

On pose $t = \frac{1}{x}$ en $+\infty : t > 0$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x &= \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{3}{t} + 2} - \frac{1}{t} = \sqrt{\frac{1 + 3t + 2t^2}{t^2}} - \frac{1}{t} \\
&= \frac{1}{t} \sqrt{1 + 3t + 2t^2} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \left(1 + \frac{1}{2}(3t) + O(t^2) \right) - \frac{1}{t} \\
&= \frac{3}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x) &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$



Exercice 38 :

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1 + h)^{\frac{1}{h}}$
2. En déduire le développement généralisé à l'ordre 2 de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
3. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 4 \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3 \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)$$

SOLUTION 38

1. Soit $y = (1 + h)^{\frac{1}{h}} \Rightarrow \ln y = \ln(1 + h)^{1/h} = \frac{1}{h} \ln(1 + h)$

alors on écrit : $y = e^{\frac{\ln(1+h)}{h}}$

$$\ln(1 + h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + O(h^4)$$

$$(1 + h)^{\frac{1}{h}} = \exp\left(\frac{\ln(1 + h)}{h}\right) = \exp\left(\frac{1}{h} \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + O(h^4)\right)\right)$$

$$= \exp\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + O(h^3)\right)$$

$$= e e^X = e \left(1 + X + \frac{X^2}{2} + O(X^3)\right)$$

$$\text{Avec } X = -\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + O(h^3), \quad X^2 = \frac{h^2}{4} + O(h^3)$$

$$(1 + h)^{\frac{1}{h}} = e \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + \frac{h^2}{8} + O(h^3)\right) = e \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{11}{24}h^2 + O(h^3)\right)$$

$$= e - \frac{e}{2}h + \frac{11e}{24}h^2 + O(h^3)$$

2. On pose $h = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ si $x \rightarrow \infty$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e - \frac{e}{2}h + \frac{11e}{24}h^2 + O(h^3)$$

$$= e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

3. $x^2 \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 4 \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3 \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)$

$$= x^2 \left[e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} - 4 \left(e - \frac{e}{4x} + \frac{11e}{24 \times 4x^2} \right) + 3 \left(e - \frac{e}{6x} + \frac{11e}{24 \times 9x^2} \right) + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right]$$

$$= x^2 \left(\frac{11e}{72x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) = \frac{11}{72}e + O(1)$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 4 \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3 \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right) = \frac{11}{72}e$$



Exercice 39 On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}}}$$

1. Ecrire le développement limité généralisé de $\cos\left(\frac{1}{2x}\right)$ en $+\infty$ à l'ordre 3
2. Ecrire le développement limité généralisé de $\sqrt{2 + \frac{1}{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3
3. En déduire le développement limité généralisé de $f(x)$ en $+\infty$ à l'ordre 3
4. Écrire l'équation de l'asymptote de f en $+\infty$

SOLUTION 39

Soit $t = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$$1. \cos\left(\frac{1}{2x}\right) = \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4) = 1 - \frac{1}{8x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$2. \sqrt{2 + \frac{1}{x}} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} = \sqrt{2} \sqrt{1+t} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + O(t^4)\right) \\ = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{32x^2} + \frac{1}{128x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$

$$3. \frac{\cos\left(\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}}} = \frac{\cos t}{\sqrt{2} \sqrt{1+t}} = \frac{1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4)}{\sqrt{2} \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + O(t^4)\right)} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} - \frac{t^3}{16} + O(t^4)\right) \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{4x} - \frac{1}{32x^2} - \frac{1}{128x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$

$$4. \text{L'équation de l'asymptote de } f \text{ en } +\infty \text{ est } y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Exercice 40 On considère la fonction

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$$

1. Ecrire le développement limité de $\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3.
2. En déduire le développement asymptotique de f à l'ordre 2 en $\pm\infty$
3. Ecrire les équations des asymptotes pour f en $\pm\infty$

SOLUTION 40

On considère la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$.

On remarque que

$$f(x) = \begin{cases} x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) & \text{si } x > 0 \\ x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Pour écrire le développement limité de $\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3 on commence par se ramener à un développement limité en 0 en posant $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ il s'agit alors de calculer le développement limité de $\sqrt{1 + y}$ en 0 à l'ordre 3

$$\sqrt{1 + y} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + O(y^4)$$

d'où :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \underset{\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

2. On en déduit le développement asymptotique de f à l'ordre 2

- en $-\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) = x \left(1 - 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{16x^3} - O\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{8x} - \frac{1}{16x^2} - O\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

- en $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) = x \left(2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) \\ &= 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

3. On en déduit les équations des asymptotes pour f :

- en $-\infty$: $y = -\frac{1}{2}$

- en $+\infty$: $y = 2x + \frac{1}{2}$



Exercice 41 :

1. Ecrire le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.
2. En déduire le développement limité de $\frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.
3. Soit $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote au graphe de f pour $x \rightarrow +\infty$.

SOLUTION 41

$$1. \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + O(x^4)$$

$$2. e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{1+1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+O(x^4)} \\ &= \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+O(x^4)\right)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+t} = \frac{1}{2} (1-t+t^2-t^3+O(t^4)) \end{aligned}$$

$$\text{Avec } t = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + O(x^4)$$

Comme on demande le $DL_3(0)$:

$$t^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + O(x^4)\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + O(x^4)$$

$$\text{et } t^3 = tt^2 = \frac{x^3}{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{x^3}{8} + O(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + O(x^4) \end{aligned}$$

$$3. \text{ On pose } X = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{X(1+e^X)} \\ &= \frac{1}{X} \left(\frac{1}{2} - \frac{X}{4} + \frac{X^3}{48} + O(X^4)\right) \\ &= x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{46x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty : \frac{1}{48x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \rightarrow 0$$

Donc $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ est asymptote au graphe de $f(x)$ en $+\infty$.



Exercice 42 Soit la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} - 1$$

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x)$
2. Dédurre l'équation de la tangente de la fonction $h(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$ au point $x = 0$
3. Calculer la limite quand $x \rightarrow 0$ de la fonction : $g(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$

SOLUTION 42

$$f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} - 1$$

$$1. D_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$2. \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon(x^3) \implies \frac{x}{\ln(1+x)} - 1 = \frac{1}{2}x + \varepsilon(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \implies \varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{1}{2}x + \varepsilon(x^2) \implies y_{\tan} = 1 + \frac{1}{2}x$$

$$3. g(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} f(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2}x + \varepsilon(x^2) \right) = \frac{1}{2} + \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$



Exercice 43 Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x \tan 2x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x - \sin x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2 x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x) \sin x}{x^2 + x^3}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh \frac{1}{x^2} \right)^{x^2}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{x} \right)^x$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{2} \right)^{\frac{x}{x-1}}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2} - x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$$

$$16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x} \right)$$

SOLUTION 43

$$1. \frac{\sin 3x}{\tan 2x} = \frac{3x + O(x^2)}{2x + O(x^2)} = \frac{3 + O(x)}{2 + O(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{3}{2}$$

$$2. \frac{\sin 3x}{x \tan 2x} = \frac{1}{x} \frac{3x + O(x^2)}{2x + O(x^2)} = \frac{1}{x} \frac{3 + O(x)}{2 + O(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^\pm} \pm\infty$$

$$3. \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)}{x + O(x^2)} = \frac{\frac{x^2}{2} + O(x^4)}{x + O(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$4. \frac{x - x \cos x}{x - \sin x} = \frac{x - x \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)}{x - x + \frac{x^3}{6} + O(x^5)} = \frac{\frac{x^3}{2} + O(x^4)}{\frac{x^3}{6} + O(x^4)} = 3 + O(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3$$

$$5. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + O(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

$$\frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{1 + x^2 + O(x^3) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)}{x^2} = \frac{3}{2} + O(x)$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$$

$$6. \ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + O((x - 1)^3)$$

$$\frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + O((x - 1)^3)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1 - \frac{1}{2}(x - 1) + O((x - 1)^2)}{(x + 1)}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$7. \frac{\ln x}{x^2 - 1} = x \frac{(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + O((x - 1)^3)}{(x - 1)(x + 1)} = x \frac{1 - \frac{1}{2}(x - 1) + O((x - 1)^2)}{(x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$8. e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

$$e^x - 1 - x = \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

$$\sin x = x + O(x^3)$$

$$\sin^2 x = x^2 + O(x^3)$$

$$\frac{e^x - 1 - x}{\sin^2 x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}{x^2 + O(x^3)} = \frac{1}{2} + O(x)$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}$$

$$9. 1 - e^x = -x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

$$\sin x = x + O(x^3)$$

$$(1 - e^x) \sin x = \left(-x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right) (x + O(x^3)) = -x^2 - \frac{x^3}{2} + O(x^4)$$

$$\frac{(1 - e^x) \sin x}{x^2 + x^3} = \frac{(1 - e^x) \sin x}{x^2 (1 + x)}$$

$$= \frac{-x^2 - \frac{x^3}{2} + O(x^4)}{x^2 (1 + x)} = -\frac{1 - \frac{x}{2} + O(x^2)}{1 + x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$$

$$10. (1 + x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1 + x)}{x}\right) = \exp\left(\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right)\right)$$

$$= \exp\left(1 - \frac{x}{2} + O(x^2)\right) = ee^{-x/2 + O(x^2)} = e\left(1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)\right)$$

$$\frac{(1 + x)^{1/x} - e}{x} = \frac{e - \frac{e}{2}x + O(x^2) - e}{x} = -\frac{e}{2} + O(x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{e}{2}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$$

On pose $t = \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$$\left(\cosh \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = (\cosh t)^{1/t} = \exp\left(\frac{\ln(\cosh t)}{t}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^3) \\ e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2} + O(t^3) \end{array} \right\} \Rightarrow \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$$

$$\frac{\ln(\cosh t)}{t} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)\right)}{t} = \frac{1}{2}t + O(t^2)$$

$$\exp\left(\frac{\ln(\cosh t)}{t}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}t + O(t^2)\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = 1$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x = e^7$$

soit $t = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ alors $y = \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x = (1 + 7t)^{1/t}$

$$\ln y = \frac{1}{t} \ln(1 + 7t) \Rightarrow y = e^{\frac{\ln(1+7t)}{t}}$$

$$\ln(1 + 7t) = 7t - \frac{49}{2}t^2 + O(t^3)$$

$$\frac{\ln(1 + 7t)}{t} = 7 - \frac{49}{2}t + O(t^2)$$

$$y = \exp\left(7 - \frac{49}{2}t + O(t^2)\right) = \exp\left(7 - \frac{49}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^7$$

$$13. f(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}} = \exp\left(\frac{x}{x-1} \ln\left|\frac{x+1}{2}\right|\right)$$

posons $t = x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$

$$\text{on alors } \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}} = \exp\left(\frac{t+1}{t} \ln\left(\frac{t+2}{2}\right)\right) = \exp\left(\frac{t+1}{t} \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right)\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$$

$$\left(\frac{t+1}{t}\right) \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right) = \frac{t+1}{t} \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \text{ donc } \exp\left(\frac{t+1}{t} \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right)\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} e^{1/2} = \sqrt{e}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}} = \sqrt{e}$$

14. $y = (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$

On pose $t = \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 0$ alors

$$y = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)^t = (\sin t)^t = \exp(t \ln(\sin t))$$

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + O(t^5) = t \left(1 - \frac{t}{6} + O(t^4)\right)$$

$$\ln(\sin t) = \ln\left(t \left(1 - \frac{t}{6} + O(t^4)\right)\right)$$

$$= \ln t + \ln\left(1 - \frac{t}{6} + O(t^4)\right) = \ln t - \frac{1}{6}t^2 + O(t^3)$$

$$y = e^{t(\ln t - \frac{1}{6}t^2 + O(t^3))} = e^{t \ln t} e^{t(-\frac{1}{6}t^2 + O(t^3))}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (t \ln t) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow 0} e^{t \ln t} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{t \ln t} e^{t(-\frac{1}{6}t^2 + O(t^3))} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x} = 1$$

15. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$$

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4) - x}{x \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)}{x^2 - \frac{1}{2}x^3 + O(x^4)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + O(x^2)}{1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right) = -\frac{1}{2}$$

16. Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x}$, On réécrit d'abord la fonction comme :

$$f(x) = x \left(\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^{1/3} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/2} \right)$$

On pose $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ alors

$$f(x) = \frac{(1 + y^2 + y^3)^{1/3} - (1 + y)^{1/2}}{y}$$

En utilisant le développement limité à l'ordre 2 de $(1 + y)^\alpha$ en 0 :

$$(1 + y^2 + y^3)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}y^2 + O(y^3)$$

$$(1 + y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + O(y^3)$$

$$f(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{3}y^2 + O(y^3)\right) - \left(1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + O(y^3)\right)}{y} = -\frac{1}{2} + \frac{11}{24}y + O(y^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{11}{24}y + O(y^2)\right) = -\frac{1}{2}$$



Exercice 44 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 3x + 4x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrez que f admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre 2 et que, pourtant, $f''(0)$ n'existe pas.

SOLUTION 44

On a $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ on peut écrire $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + O(x^3)$ ce qui, par définition, montre que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

D'autre part,

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 8x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 + 4x + x^2 \sin \frac{1}{x}\right) = 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Mais $f''(0)$ n'existe pas car le quotient $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 8 + 3x \sin \frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Remarque

On sait que, pour qu'une fonction admette un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, il est suffisant qu'elle soit n fois dérivable en 0. Cet exercice montre que ce n'est pas nécessaire.



Exercice 45 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \ln |x| & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ puis $f'(0)$
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Calculer la dérivée seconde $f''(0)$ si elle existe.
5. Peut-on utiliser la formule de Taylor-Young pour écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2? Pourquoi?
6. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 s'il existe.

SOLUTION 45

L'application f se réécrit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 \ln(-x) = 0$
 on a donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ alors f est continue en 0.

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$
 et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \ln(-x) = 0$
 la dérivée de f est

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 3x^2 \ln(-x) + x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. f' est continue en $x = 0$ car
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \right) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 \ln(-x) + x^2) = 0$
 on a donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = f'(0)$

4. La dérivée seconde de f en $x = 0$ n'existe pas car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) \text{ n'existe pas.}$$

5. On ne peut pas utiliser la formule de TAYLOR-YOUNG pour écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 car $f''(0)$ n'existe pas.

6. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 \ln(-x) = 0$ on peut écrire $f(x) = O(x^3)$ ce qui, par définition, montre que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

