Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Calcul intégral
Exerices corrigés

Exercice 1 Calculer directement les primitives des fonctions suivantes

1. $\int (1+x)\,dx$
2. $\int 4x^3 dx$
3. $\int \sqrt{x} dx$
4. $\int \frac{dx}{x^5}$
5. $\int \left(\frac{5}{x} - x^3 + 4x^7\right) dx$
6. $\int \left(e^{3x} - \sin 2x + x\right) dx$
7. $\int \left(1+\tan^2 x\right) dx$
8. $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$
9. $\int (\sinh 3x + 2\cosh 4x)\,dx$
10. $\int \tanh x dx$
11. $\int \cos^2 x dx$
12. $\int \sin^2 x dx$

Solution 1

1. $\int (1+x)\,dx = x + \frac{x^2}{2} + C$
2. $\int 4x^3 dx = 4\int x^3 dx = 4\frac{x^4}{4} = x^4 + C$
3. $\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
4. $\int \frac{dx}{x^5} = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4} + C$
5. $\int \left(\frac{5}{x} - x^3 + 4x^7\right) dx = 5\ln x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^8 + C$
6. $\int \left(e^{3x} - \sin 2x + x\right) dx = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}x^2 + C$
7. $\int \tan^2 x dx = \int \left(-1 + 1 + \tan^2 x\right) dx$
   $= -\int dx + \int \left(1+\tan^2 x\right) dx = -x + \tan x + C$
8. $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + C$
9. $\int (\sinh 3x + 2\cosh 4x)\,dx = \frac{1}{3}\cosh 3x + \frac{1}{2}\sinh 4x + C$
10. $\int \tanh x dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \ln(\cosh x) + C$
11. $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$
12. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$

Exercice 2 Calculer par changement de variable les primitives des fonctions suivantes

1. $\dfrac{x}{(x+1)^2}$
2. $\dfrac{x}{2x^2+4}$
3. $\dfrac{1}{e^x+1}$
4. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x+1}}$
5. $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$
7. $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$
8. $\dfrac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}$
9. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
10. $\sqrt{1-x^2}$
11. $\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$
12. $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$
13. $\cot(5x-7)$
14. $\sin^2 \mathbf{x} \cos \mathbf{x}$
15. $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^3+3}}$
16. $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$
17. $\dfrac{\sqrt{\tan x+1}}{\cos^2 x}$
18. $\dfrac{1}{x\ln x}$
19. $\dfrac{1}{\cos^2 x\,(3\tan x+1)}$
20. $\dfrac{x}{x^4+a^4}$

Solution 2

1. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x+1)^2} = \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2}dx = \int \frac{dx}{(x+1)} - \int \frac{dx}{(x+1)^2}$

   On pose $t = x+1$ alors $dt = dx$

   $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x+1)^2} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t^2} = \ln t + \frac{1}{t} = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+2}dx$

   Soit $t = x^2+2$; donc $dt = 2xdx$ou bien $xdx = \dfrac{1}{2}dt$

   $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln t = \frac{1}{4}\ln(x^2+2)$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1} = x - \ln(e^x+1)$

   $e^x+1 = t$ alors $dt = e^x dx$ c'est-à-dire $dx = \dfrac{dt}{e^x} = \dfrac{dt}{t-1}$

   $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{dt}{(t-1)\,t}$

   $\displaystyle\frac{1}{(t-1)\,t} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}$

   $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} = \ln(t-1) - \ln t = \ln e^x - \ln(e^x+1) = x - \ln(e^x+1)$

4. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x+1}}dx$

   On pose $t = \cos x \Longrightarrow dt = -\sin x dx$

   $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x+1}}dx = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\operatorname{arg\,sinh} t = -\operatorname{arg\,sinh}(\cos x) = -\ln\left(\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right)$

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$

Soit $x = \sin t$ donc $dx = \cos t dt$

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$

$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\cos t} = \int \sin^2 t dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)$

$= \frac{1}{2}(t - \sin t \cos t) = \frac{1}{2}\left(t - 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right) = \frac{1}{2}\left(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right)$

6. $I = \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$

Posons $x = \frac{a}{\cos t} \Longrightarrow dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t}dt$

et $\sqrt{x^2-a^2} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = a\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = a\frac{\sin t}{\cos t}$

$I = \int \frac{a \sin t}{\cos t}\frac{\cos t}{a}\frac{a \sin t}{\cos^2 t}dt = a\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt = a\int \tan^2 t dt$

$= a\int \left(\tan^2 t + 1 - 1\right)dt = a(\tan t - t) = a\frac{\sin t}{\cos t} - at = \frac{a}{\cos t}\sqrt{1-\cos^2 t} - at$

$= x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} - a \arccos\frac{a}{x} = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x}$

7. $I = \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$

On pose $x = \tan t$ on trouve : $dx = \left(1+\tan^2 t\right)dt = \frac{dt}{\cos^2 t}$

et $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\tan^2 t} = \frac{1}{\cos t}$

$I = \int \frac{1}{\tan t\left(\frac{1}{\cos t}\right)}\frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}}{1+\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2 t}-1}{\sqrt{1+\tan^2 t}+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$

Pour l'intégrale $\int \frac{dt}{\sin t}$ on pose $u = \tan\frac{t}{2}$ alors $dt = \frac{2du}{1+u^2}$ et $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$

alors on aura $\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(\tan t/2)$

d'autre part on a

$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{1+\cos 2x}$ donc

$\tan^2 x = \frac{2}{1+\cos 2x} - 1 = \frac{2-1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

et donc $\tan(t/2) = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$ et par suite $\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right)$

Autre méthode :

Soit $x=\sinh\theta \Longrightarrow dx=\cosh\theta d\theta$, $\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\sinh^2\theta}=\cosh\theta$

$$I=\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{\cosh\theta d\theta}{\sinh\theta\cosh\theta}=\int\frac{d\theta}{\sinh\theta}=\int\frac{2d\theta}{e^{\theta}-e^{-\theta}}=\int\frac{2e^{\theta}d\theta}{e^{2\theta}-1}$$

$t=e^{\theta}\Longrightarrow dt=e^{\theta}d\theta$ et $\frac{2}{e^{2\theta}-1}=\frac{2}{t^2-1}=\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}$

$$I=\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t+1}=\ln(t-1)-\ln(t+1)=\ln\frac{t-1}{t+1}=\ln\frac{e^{\theta}-1}{e^{\theta}+1}$$

$x=\sinh\theta\Longrightarrow\theta=\operatorname{arcsinh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Longleftrightarrow e^{\theta}=x+\sqrt{x^2+1}$

$$I=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C$$

8. $\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx=\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2}$

Posons $x=\sqrt{2}\sin t\Longrightarrow dx=\sqrt{2}\cos t$ et $\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}\cos t$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx=\int\frac{2\sin^2 t}{\sqrt{2}\cos t}\sqrt{2}\cos t dt=\int 2\sin^2 t dt=\int(1-\cos 2t)\,dt=t-\frac{\sin 2t}{2}$$

$$=t-\sin t\cos t=\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\frac{x}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}=\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2}$$

9. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$

soit $x=\tan t$ donc $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$ et $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\tan^2 t+1}=\frac{1}{\cos t}$

$$\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\int\frac{1/\cos t}{\tan t}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\frac{dt}{\sin t\cos^2 t}=\int\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin t\cos^2 t}dt$$

$$=\int\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{1}{\sin t}\right)dt=-\int\frac{d(\cos t)}{\cos^2 t}+\int\frac{dt}{\sin t}=\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right)$$

$$=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$$

10. $\int\sqrt{1-x^2}dx$

$x=\sin t\Longrightarrow dx=\cos t dt$ et $\sqrt{1-x^2}=\cos t$

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\cos^2 t dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)=\frac{1}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)=\frac{1}{2}\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)$$

11. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x}}=\int e^{-x/2}dx=-2e^{-x/2}=-\frac{2}{\sqrt{e^x}}$

12. $\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

On pose $t=\sqrt{x+1}$ alors $dt=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$ et d'autre part $t^2=x+1$alors $x=t^2-1$

$$\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int(t^2-1)\,2dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)=\frac{2t}{3}(t^2-3)=\frac{2\sqrt{x+1}}{3}(x-2)$$

13. $\int\cot(5x-7)\,dx$

soit $u=5x-7$ donc $du=5dx$

$$\int\cot(5x-7)\,dx=\frac{1}{5}\int\frac{\cos u}{\sin u}du=\frac{1}{5}\ln(\sin u)=\frac{1}{5}\ln\sin(5x-7)$$

14. $\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \dfrac{\sin^3 x}{3}$

15. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{2x^3+3}} dx$

Posons $t = 2x^3 + 3 \Longrightarrow dt = 6x^2 dx$

$\int \dfrac{x^2}{\sqrt{2x^3+3}} dx = \dfrac{1}{6} \int \dfrac{dt}{\sqrt{t}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{t} = \dfrac{1}{3}\sqrt{2x^3+3}$

16. $\int \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$

Pour $u = 1 + \sin^2 x$ on aura $du = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx$

$\int \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx = \int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{1+\sin^2 x}$

17. $\int \dfrac{\sqrt{\tan x + 1}}{\cos^2 x} dx$

$t = 1 + \tan x \Longrightarrow dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$

$\int \sqrt{t} dt = \dfrac{2}{3} t\sqrt{t} = \dfrac{2}{3}(\tan x + 1)\sqrt{\tan x + 1}$

18. $\int \dfrac{1}{x \ln x} dx$

soit $t = \ln x \Longrightarrow dt = \dfrac{dx}{x}$

$\int \dfrac{dx}{x \ln x} = \int \dfrac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$

19. $\int \dfrac{dx}{(3\tan x + 1)\cos^2 x}$

$u = 3\tan x + 1 \Longrightarrow du = \dfrac{3dx}{\cos^2 x}$

$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x (3\tan x + 1)} = \int \dfrac{du}{3u} = \dfrac{1}{3}\ln u = \dfrac{1}{3}\ln(3\tan x + 1)$

20. $I = \int \dfrac{x}{x^4 + a^4} dx = \dfrac{1}{a^4} \int \dfrac{x}{\left(\dfrac{x^2}{a^2}\right)^2 + 1} dx$

On pose $t = \dfrac{x^2}{a^2}$ alors $dt = 2\dfrac{xdx}{a^2}$ ou bien $xdx = \dfrac{a^2}{2} dt$

$I = \dfrac{1}{a^4} \int \dfrac{a^2}{2} \dfrac{dt}{t^2+1} = \dfrac{1}{2a^2} \arctan t^2 = \dfrac{1}{2a^2} \arctan\left(\dfrac{x^2}{a^2}\right)$

Exercice 3 Intégrer par parties les fonctions suivantes

1. $x^n \ln x; (n \neq -1)$
2. $\int \ln x^2 dx$
3. $\ln(x^2+1)$
4. $\ln(1-x)$
5. $\arcsin x$
6. $x \arctan x$
7. $x \cos^2 x$
8. $\dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $\dfrac{x \arctan x}{(1+x^2)^2}$

Solution 3

$$\int u dv = uv - \int v du$$

1. $I = \int x^n \ln x dx$

$$\begin{cases} u = \ln x & \Longrightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ x^n dx = dv & \Longrightarrow v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}, n \neq -1$$

$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}(\ln x + n\ln x - 1)$$

– Pour $n = -1$: $I = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x$

2. $I = \int \ln x^2 dx = 2\int \ln x dx$

$$\begin{cases} u = \ln x & \Longrightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dx = dv & \Longrightarrow v = x \end{cases}$$

$$I = 2x\ln x - 2\int dx = 2x\ln x - 2x = 2x(\ln x - 1) + C$$

3. $\int \ln(x^2+1) dx$

$$\begin{cases} u = \ln(x^2+1) & \Longrightarrow & du = \dfrac{2xdx}{1+x^2} \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{cases}$$

$$\int \ln(x^2+1) dx = x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int dx + 2\int \frac{dx}{1+x^2} = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x$$

4. $\int \ln(1-x) dx$

$$\begin{cases} u = \ln(1-x) & \Longrightarrow & du = -\dfrac{dx}{1-x} \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{cases}$$

$$\int \ln(1-x) dx = x\ln(1-x) + \int \frac{xdx}{1-x} = x\ln(1-x) + \int \frac{x-1+1}{1-x} dx$$

$$= x\ln(1-x) + \int \frac{dx}{1-x} - \int dx$$

$$= x\ln(1-x) - \ln(x-1) - x = (x-1)\ln(1-x) - x$$

5. $\int \arcsin x dx$

$$\begin{cases} u = \arcsin x & \Longrightarrow & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dx = dv & \Longrightarrow & v = x \end{cases}$$

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Posons $t = 1 - x^2$ alors $dt = -2xdx$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

6. $\int x \arctan x dx$

$$\begin{cases} u = \arctan x & \Longrightarrow \quad du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ xdx = dv & \Longrightarrow \quad v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\int x \arctan x dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x$$

7. $\int x \cos^2 x dx$

$$\begin{cases} u = x & \Longrightarrow \quad du = dx \\ dv = \cos^2 x dx & \Longrightarrow \quad v = \int \cos^2 x dx = \dfrac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x \end{cases}$$

$$\int x \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x \sin 2x - \int \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}\cos 2x$$

8. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\begin{cases} u = \arcsin x & \Longrightarrow \quad du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = dv & \Longrightarrow \quad v = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -(\arcsin x)\sqrt{1-x^2} - \int (-1)\, dx = x - (\arcsin x)\sqrt{1-x^2}$$

9. $\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2}dx$

$$\begin{cases} u = \arctan x & \Longrightarrow \quad du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ \dfrac{xdx}{(1+x^2)^2} = dv & \Longrightarrow \quad v = \int \dfrac{xdx}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{1}{2(x^2+1)} \end{cases}$$

$$\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \arctan x - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$$

Pour le second inégrale on fait l'intégrer par parties :

On pose $u = x \Longrightarrow du = dx$ et $dv = \dfrac{xdx}{(1+x^2)^2} \Longrightarrow v = \displaystyle\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)}$

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \int \frac{dx}{2(1+x^2)} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \arctan x - \left(-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x\right) = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2x^2+2}$$

$$\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\arctan x + \frac{x}{4(x^2+1)}$$

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$
3. $\displaystyle\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{52-3x-4x^2}}$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$
7. $\displaystyle\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}dx$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$

Solution 4

1. $$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

2. $$I = \int \frac{dx}{x^2+3x+1}$$
$$x^2+3x+1=0 \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-3}{2} \text{ ou } -\frac{\sqrt{5}+3}{2}$$
$$\frac{1}{x^2+3x+1} = \frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}}\right)$$
$$I = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}$$

3. $$I = \int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}dx$$
$6x^2+x-1=0$, Solutions : $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$
$$\frac{7x+1}{6x^2+x-1} = \frac{1/2}{x+1/2} + \frac{2/3}{x-1/3}$$
$$I = \int\left(\frac{1/2}{x+1/2}+\frac{2/3}{x-1/3}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\ln\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

4. $$I = \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$$
$$\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx + \int \frac{3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{8x+4-4}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx + \int \frac{3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{8x+4}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} = \frac{1}{8}J + \frac{5}{2}K$$

Pour J : posons $t = 4x^2 + 4x + 3$ alors $dt = (8x+4)\,dx$ et par suite

$$J = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{4x^2+4x+3}$$

Pour K : $\sqrt{4x^2+4x+3} = 2\sqrt{x^2+x+\frac{3}{4}}$

$$= 2\sqrt{x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{x+1/2}{1/\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+1/2}{1/\sqrt{2}}\right)^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh} t = \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

On note que $\operatorname{arcsinh} x = \sinh^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

alors $\operatorname{arcsinh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}} + \sqrt{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 + \ln\left(x+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{1}{2}\right)$$

Finalement

$$I = \frac{1}{8}J + \frac{5}{2}K = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \ln\left(x+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{5}{8}\ln 2 + \frac{5}{4}\ln\left(x+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}$$

5. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{52-3x-4x^2}}$

$$52-3x-4x^2 = 4\left(13-\frac{3}{4}x-x^2\right) = 4\left(13+\frac{9}{64}-\frac{9}{64}-2\frac{3}{8}x-x^2\right)$$

$$= 4\left(\frac{841}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right) = 4\left(\left(\frac{29}{8}\right)^2-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right)$$

$$I = \int \frac{dx}{2\sqrt{\left(\frac{29}{8}\right)^2-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{\left(\frac{29}{8}\right)^2-\left(\frac{8x+3}{8}\right)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{8x+3}{29}\right)$$

6. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$

$$1+x+x^2 = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}+2\frac{x}{2}+x^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = \left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \arg\sinh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) = \ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

7. $I = \int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}dx$

$$\frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1} = 3x^2-x+\frac{x}{2x^2-x+1}$$

$$I = \int\left(3x^2-x+\frac{x}{2x^2-x+1}\right)dx = \int (3x^2-x)\,dx + \int \frac{x\,dx}{2x^2-x+1}$$

$= x^3 - \frac{x^2}{2} + \int \frac{xdx}{2x^2 - x + 1}$

On a $\frac{d}{dx}\left(2x^2 - x + 1\right) = 4x - 1$ alors on écrit :

$\int \frac{xdx}{2x^2 - x + 1} = \frac{1}{4}\int \frac{4x - 1}{2x^2 - x + 1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{2x^2 - x + 1} = \frac{1}{4}(J + K)$

$J = \int \frac{4x - 1}{2x^2 - x + 1}dx = \ln\left(2x^2 - x + 1\right)$

Pour K :

$$2x^2 - x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2\frac{x}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right) = 2\left(\left(\frac{4x - 1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2\right)$$

$$K = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{4x - 1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4x - 1}{\sqrt{7}}\right)$$

$$I = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\left(\ln\left(2x^2 - x + 1\right) + \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4x - 1}{\sqrt{7}}\right)\right)$$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \ln\left(2a + 2x + 2\sqrt{x^2 + 2ax}\right)$

9. $= \int \frac{dx}{\sqrt{2ax + x^2 + a^2 - a^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + a)^2 - a^2}}$

$$= \arg\cosh \frac{x + a}{a} = \ln\left(\frac{x + a}{a} + \sqrt{\left(\frac{x + a}{a}\right)^2 - 1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{a}\sqrt{x^2 + 2ax} + \frac{a + x}{a}\right)$$

Exercice 5 Intégration des fonctions trigonométriques

1. $\sin^3 x$
2. $\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$
3. $\sin^4 x \cos^4 x$
4. $\frac{dx}{\cos^4 x}$
5. $\sin x \sin 3x$
6. $\cos 4x \sin 7x$
7. $\frac{\sin x}{1 + \sin x}$
8. $\frac{1}{4 - \sin x}$

Solution 5

1. $\int \sin^3 xdx = \int \sin^2 x \sin xdx = \int \left(1 - \cos^2 x\right) \sin xdx$

$$= -\int \left(1 - \cos^2 x\right) d\left(\cos x\right) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$$

2. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\left(1 - \sin^2 x\right) \cos x}{\sin^4 x}dx$

soit $t = \sin x$ donc $\cos x dx = dt$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1-t^2}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\right) dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}$$

3. $$\int \sin^4 x \cos^4 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^4 dx = \frac{1}{16}\int \left(\sin^2 2x\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{64}\int \left(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x\right) dx = \frac{1}{64}\int \left(1 - 2\cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{64}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 8x\right) dx = \frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 8x\right)$$
$$= \frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\sin 4x + \frac{1}{1024}\sin 8x$$

4. $$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cos^2 x} = \int \left(1 + \tan^2 x\right) \frac{dx}{\cos^2 x}$$
$$= \int \left(1 + u^2\right) du = u + \frac{u^3}{3} = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3}$$

5. $$\int \sin x \sin 3x dx = \int \left(\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x$$

6. $$\int \cos 4x \sin 7x dx = \int \left(\frac{\sin 11x}{2} + \frac{\sin 3x}{2}\right) dx = -\frac{1}{22}\cos 11x - \frac{1}{6}\cos 3x$$

7. $$\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$$

posons $t = \tan\frac{x}{2} \Longrightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{4t}{1+t^2+2t}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{4t}{(1+t)^2\left(1+t^2\right)} dt$$

$$\frac{4t}{(1+t)^2\left(1+t^2\right)} = \frac{2}{t^2+1} - \frac{2}{(t+1)^2}$$

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \int \left(\frac{2}{1+t^2} - \frac{2}{(1+t)^2}\right) dt = 2\arctan t + \frac{1}{1+t} = x + \frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}$$

8. $$\int \frac{dx}{4-\sin x}$$

$t = \tan\frac{x}{2} \Longrightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{4-\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4-\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2\left(1+t^2\right)-t} =$$

$$2\left(1+t^2\right) - t = 2\left(1+t^2-2\frac{t}{4}\right) = 2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}$$

$$\int \frac{dx}{4-\sin x} = \int \frac{dt}{2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}} = \frac{2}{\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{4t-1}{\sqrt{15}}\right) = \frac{2}{\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{4\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{15}}\right)$$

Exercice 6 Calculer les intégrales définies suivantes

1. directement

(a) $\int_{-a}^{a} e^x dx$
(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$
(c) $\int_0^2 \frac{dx}{1+x}$
(d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
(e) $\int_1^2 \left(x^3-2x\right) dx$
(f) $\int_0^{\pi} \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^2 x}$
(g) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
(h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

2. par parties

(a) $\int_0^1 \left(x^2-1\right) e^{2x} dx$
(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$
(c) $\int_1^e \ln x dx$
(d) $\int_1^e x \ln x dx$
(e) $\int_0^{\pi} e^{2x} \sin x dx$
(f) $\int_0^1 \arcsin x dx$

3. Par changement de variables

(a) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$
(b) $\int_1^2 \sqrt{x+1} dx$
(c) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$
(d) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$
(e) $\int_2^{29} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}+3} dx$
(f) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$

Solution 6

1. directement

(a) $\int_{-a}^{a} e^x dx = e^x\big|_{-a}^{a} = e^a - e^{-a} = 2\sinh a$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = -\left.\frac{\cos 2x}{2}\right|_0^{\pi/4} = -\frac{\cos \pi/2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$

(c) $\int_0^2 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\big|_0^2 = \ln 3$

(d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{1}{2}\pi$

(e) $\int_1^2 \left(x^3-2x\right) dx = \left.\frac{x^4}{4} - x^2\right|_1^2 = (4-4) - \left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{3}{4}$

(f) $$\int_0^{\pi} \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{2\sin x \cos x dx}{1+\sin^2 x}$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{2 \sin x d(\sin x)}{1+\sin^2 x} = \ln\left(1+\sin^2 x\right)\big|_0^{\pi} = 0$$

(g) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$

(h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = -\ln(\cos x)\big|_0^{\pi/4} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln\sqrt{2}$

2. par parties

(a) $I = \int_0^1 (x^2-1)\, e^{2x} dx$

$$\begin{cases} u = x^2 - 1 & \Longrightarrow & du = 2xdx \\ e^{2x}dx = dv & \Longrightarrow & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 (x^2-1)\, e^{2x} dx = \frac{1}{2}(x^2-1)\, e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 xe^{2x}dx$$

$$\begin{cases} u_1 = x & \Longrightarrow & du_1 = dx \\ e^{2x}dx = dv & \Longrightarrow & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^2$$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

$$\begin{cases} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ \cos x dx = dv & \Longrightarrow & v = \sin x \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = x \sin x|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

(c) $\int_1^e \ln x dx$

$$\begin{cases} u = \ln x & \Longrightarrow & du = \frac{dx}{x} \\ dx = dv & \Longrightarrow & v = x \end{cases}$$

$$\int_1^e \ln x dx = x \ln x|_1^e - \int_1^e dx = e - e + 1 = 1$$

(d) $\int_1^e x \ln x dx$

$$\begin{cases} u = \ln x & \Longrightarrow & du = \frac{dx}{x} \\ xdx = dv & \Longrightarrow & v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{xdx}{2} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

(e) $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{5}e^{2\pi} + \frac{1}{5}$

$$\begin{cases} u = \sin x & \Longrightarrow & du = \cos x dx \\ e^{2x}dx = dv & \Longrightarrow & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2}e^{2x} \sin x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x dx$$

$$\begin{cases} u_1 = \cos x & \Longrightarrow & du = -\sin x dx \\ e^{2x}dx = dv & \Longrightarrow & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$I = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x} \cos x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2x} \sin x dx\right) = -\frac{1}{4}\left(-e^{2\pi} - 1\right) - \frac{1}{4}I$$

$$I\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}I = \frac{1}{4}\left(e^{2\pi} + 1\right) \Longrightarrow I = \frac{1}{5}\left(e^{2\pi} + 1\right)$$

(f) $\int_0^1 \arcsin x dx$

On a trouvé

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

donc $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x dx = \left(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right)_0^1$

$$= \arcsin 1 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

3. Par changement de variables

(a) $\displaystyle\int_0^1 x e^{x^2} dx$

Posons $t = x^2 \Longrightarrow dt = 2xdx$ Pour $x = 0 : t = 0$ et pour $x = 1 : t = 1$

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+1} dx$

$t = x+1 \Longrightarrow dt = dx$

$x = 1 \quad \to \quad t = 2$

$x = 2 \quad \to \quad t = 3$

$$\int_1^2 \sqrt{x+1} dx = \int_2^3 \sqrt{t} dt = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$

$x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t dt$ et $\sqrt{1-x^2} = \cos t$

$x = 1/2 \quad \to \quad t = \pi/6$

$x = 1 \quad \to \quad t = \pi/2$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{8}\sqrt{3}$$

(d) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Soit $x = t^2$ donc $t = \sqrt{x}$ et $dx = 2tdt$

$x = 0 \quad \to \quad t = 0$

$x = 4 \quad \to \quad t = 2$

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t} dt$$

$$= 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2\left(t - \ln(1+t)\right)\big|_0^2 = 2(2 - \ln 3)$$

(e) $\displaystyle\int_2^{29} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}+3} dx$

Posons $t^3 = x - 2 \Longrightarrow 3t^2 dt = dx$ et $\sqrt[3]{x-2} = t$

$x = 2 \quad \to \quad t = 0$

$x = 29 \quad \to \quad t = 3$

$$I = \int_2^{29} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}+3} dx = \int_0^3 \frac{t}{t+3}\left(3t^2 dt\right)$$

$$= \int_0^3 \frac{3t^3}{t+3} dt$$

$$\frac{3t^3}{t+3} = 3t^2 - 9t + 27 - \frac{81}{t+3}$$

$$I = \int_0^3 \left(3t^2 - 9t + 27 - \frac{81}{t+3}\right) dt = t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 27t - 81\ln(t+3)\Big|_0^3$$
$$= 27 - \frac{81}{2} + 81 - 81\ln 6 + 81\ln 3 = -81\ln 3 + \frac{135}{2}$$

(f) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$

$$e^x - 1 = t^2 \Longrightarrow e^x dx = 2tdt \Longrightarrow dx = \frac{2tdt}{e^x} = \frac{2tdt}{1+t^2}$$

$$x = 0 \quad \to \quad t = 0$$
$$x = \ln 2 \quad \to \quad t = 1$$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx = \int_0^1 \frac{2t^2dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$
$$= 2\left(t - \arctan t\right)_0^1 = 2\left(1 - \arctan 1\right) = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 7 soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

1. Démontrer que I_n, vérifie la relation de réccurence
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$
2. Calculer I_n en fonction de n.
3. Déduire I_9 et I_{10}.

Solution 7

1. Par changement de variable : $x = \frac{\pi}{2} - t \to dx = -dt$

$$\begin{cases} x = 0 & \to \quad t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} & \to \quad t = 0 \end{cases}$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$$

$$I_n = \int_{\pi/2}^{0} \cos^n t\,(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x dx$

Intégrons par parties : $\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \Longrightarrow du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx \\ dv = \sin x dx \Longrightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$$I_n = \underbrace{-\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\pi/2}}_{=0} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\left(1 - \sin^2 x\right) dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

On a donc l'égalité : $I_n = (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n \Longrightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

2. $I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{1}{2}\pi$ et $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$

Si n est paire :

$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}, \quad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \ I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$ ou bien

$$I_n = \frac{(n-1)\,(n-3)\,(n-5)\cdots \times 3 \times 1}{n\,(n-2)\,(n-4)\cdots \times 4 \times 2}\frac{\pi}{2}$$

si n est impaire :

$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}, \ I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5}\frac{2}{3}, \ I_7 = \frac{6}{7} I_5 = \frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}$ et donc

$$I_n = \frac{(n-1)\,(n-3)\cdots \times 4 \times 2}{n\,(n-2)\cdots \times 3 \times 1}$$

3. $I_9 = \frac{8 \times 6 \times 4 \times 2}{9 \times 7 \times 5 \times 3} = \frac{128}{315}$

$I_{10} = \frac{9 \times 7 \times 5 \times 3}{10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2}\frac{\pi}{2} = \frac{63}{512}\pi$

Exercice 8 Soit l'intégrale

$$I_n = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}; n \in \mathbb{N}$$

1. En intégrant I_n par parties, calculer I_{n+1} en fonction de I_n.
2. Calculer I_0 et I_1 et déduire I_2 et I_3

Solution 8

$I_n = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}$

1. soit $u = \frac{1}{(x^2+1)^n} \Longrightarrow du = -\frac{2nx}{(x^2+1)^{n+1}} dx$

$dv = dx \Longrightarrow v = x$

$I_n = \left.\frac{x}{(x^2+1)^n}\right|_0^1 + 2n \int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{n+1}}$

$= \frac{1}{2^n} + 2n \int\limits_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \frac{1}{2^n} + 2n \int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}} dx - 2n \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$

$= \frac{1}{2^n} + 2n \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n} - 2n \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$

$= \frac{1}{2^n} + 2n I_n - 2n I_{n+1}$

$\Longrightarrow$

$$2nI_{n+1} = (2n-1)\,I_n + \frac{1}{2^n} \Longleftrightarrow I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}$$

2. $I_0 = \int\limits_0^1 dx = 1$

$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}$

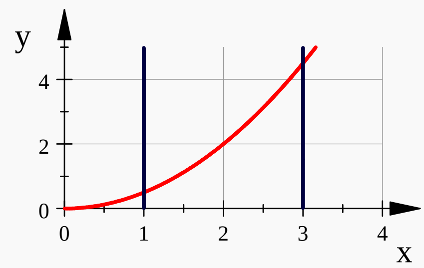
En utilisant la relation de récurrence :

$n = 1 : I_2 = \frac{2-1}{2}I_1 + \frac{1}{2^2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

$n = 2 : I_3 = \frac{4-1}{4}I_2 + \frac{1}{2\times 2^3} = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16} = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$

Exercice 9 Calculer l'aire du domaine limité par la parabole $y = \frac{x^2}{2}$,les droites $x = 1$, $x = 3$ et l'axe ox

Solution 9

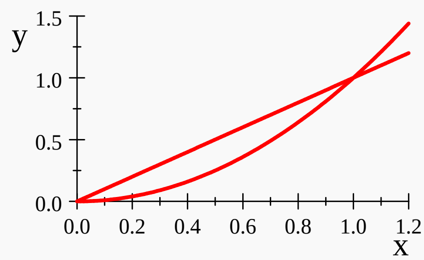


L'aire du domaine est donnée par : $A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_1^3 \frac{x^2}{2}dx = \frac{13}{3}$

Exercice 10 Calculer l'aire du domaine limité par la parabole $y = x^2$, la droite $y = x$ pour $0 \le x \le 1$

Solution 10

l'aire du domaine limité par la parabole $y = x^2$, la droites $y = x$ et l'axe ox

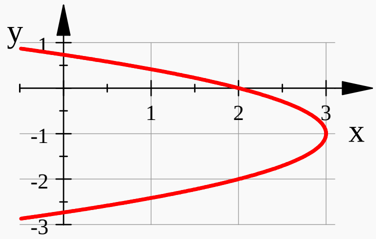


$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{1}{6}$$

Exercice 11 Calculer l'aire du domaine limité par la courbe $x = 2 - 2y - y^2$ et l'axe Oy

Solution 11

domaine limité par la courbe $x = 2 - 2y - y^2$ et l'axe Oy



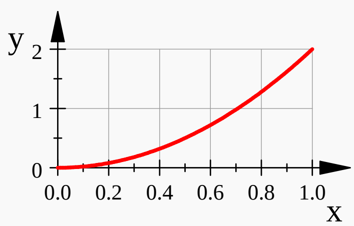
Les points d'intersections de $x(y)$ avec l'axe oy sont tels que $2 - 2y - y^2 = 0 \Longrightarrow y = -1 \pm \sqrt{3}$ alors :

$$A = \int_{-1-\sqrt{3}}^{-1+\sqrt{3}} (2 - 2y - y^2)\, dy = 4\sqrt{3}$$

Exercice 12 Calculer la longueur de l'arc parabolique $y = 2x^2$ compris entre $x = 0$ et $x = 1$

Solution 12

la longueur de l'arc parabolique $y = 2x^2$ compris entre $x = 0$ et $x = 1$



$$\ell = \int_a^b d\ell = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$y = 2x^2 \Longrightarrow dy = 4x dx$$

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{dx^2 + 16x^2 dx^2} = \int_0^1 \sqrt{1 + 16x^2} dx = \frac{1}{8} \ln\left(\sqrt{17} + 4\right) + \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

Posons $x = \frac{1}{4} \sinh t \Longrightarrow dx = \frac{1}{4} \cosh t dt$

$\sqrt{1+16x^2} = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t$

$\ell = \int\limits_{x=0}^{x=1} \frac{1}{4}\cosh^2 t dt = \frac{1}{4}\int\limits_{x=0}^{x=1} \frac{\cosh 2t+1}{2} dt = \frac{1}{8}\left(\frac{\sinh 2t}{2}+t\right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}\left(\sinh t\cosh t + t\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$

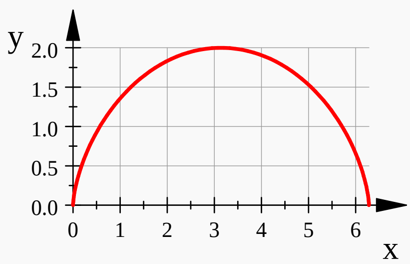
$= \frac{1}{8}\left(\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t}+t\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}\left(4x\sqrt{1+16x^2}+\arg\sinh 4x\right)\Big|_0^1$

$= \frac{1}{8}\left(4x\sqrt{1+16x^2}+\ln\left(4x+\sqrt{1+16x^2}\right)\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)$

Exercice 13 Calculer la longueur de la courbe définie par les relations paramétriques :
$x = a(t-\sin t)$ et $y = a(1-\cos t)$ pour $0 \le t \le 2\pi$

Solution 13

longueur de la courbe définie par $x = a(t-\sin t)$ et $y = a(1-\cos t)$ pour $0 \le t \le 2\pi$



$\ell = \int\limits_a^b d\ell = \int\limits_a^b \sqrt{dx^2+dy^2}$

$dx = a(1-\cos t)\,dt \qquad dy = a\sin t dt$

$d\ell = a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt = a\sqrt{1+\cos^2 t-2\cos t+\sin^2 t}dt$

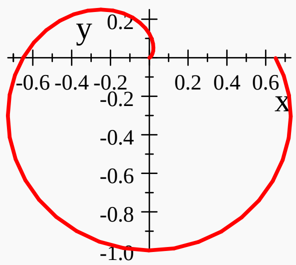
$= a\sqrt{2(1-\cos t)}dt = a\sqrt{4\sin^2(t/2)}dt = 2a\sin(t/2)\,dt$

$\ell = \int\limits_0^{2\pi} 2a\sin(t/2)\,dt = 2a\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi-\cos 0) = 8a$

Exercice 14 Calculer la longueur de la courbe : $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$ $(0 \le \theta \le \pi)$

Solution 14

longueur de $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$



$$r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$$

$\ell = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$

$$\frac{dr}{d\theta} = a\left(3\times\frac{1}{3}\cos\frac{\theta}{3}\sin^2\frac{\theta}{3}\right) d\theta = a\cos\frac{\theta}{3}\sin^2\frac{\theta}{3} d\theta$$

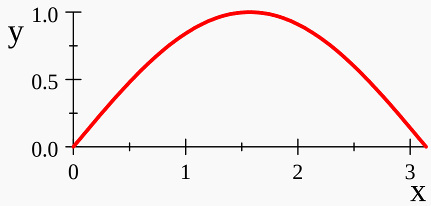
$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3} + a^2\cos^2\frac{\theta}{3}\sin^4\frac{\theta}{3}} d\theta$$

$$= a\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{\theta}{3} d\theta = \frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos\frac{2\theta}{3}\right) d\theta = a\left(\pi + \frac{3}{8}\sqrt{3}\right)$$

Exercice 15 Calculer le volume de corps de révolution de la courbe $y = \sin x$ limité par $0 \leq x \leq \pi$ par rotation : autour de l'axe Ox et autour de l'axe Oy

Solution 15

volume de corps de révolution de $y = \sin x$ limité par $0 \leq x \leq \pi$

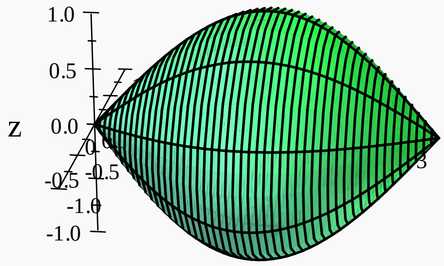


$\sin x$

Par rotation autour de l'axe ox,chaque point $M(x, y)$ décrit un cercle centré sur ox et de rayon $R = y$ dont l'air du disque est $A = \pi R^2 = \pi y^2(x)$

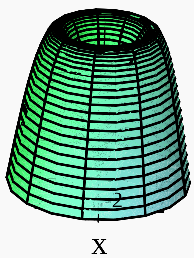
Le volume du cylindre élémentaire d'épaisseur dx est $dV = \pi y^2 dx$ et donc le volume de revolution est :

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^{\pi} \pi\sin^2 x dx = \pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$



Un rectangle élémentaire, au voisinage d'un point d'abscisse x, de largeur dx et hauteur y, détermine par rotation autour de Oy un cylindre de rayon de base x, de hauteur $y = f(x)$ et d'épaisseur dx.En découpant le cylinder de haut en bas, on obteint une forme parallélépipède de longueur égale au périmètre de base $(2\pi x)$, de hauteur y et d'épaisseur dx. Le volume de ce parallélépipède est donc $dV = (2\pi x)\, y dx$

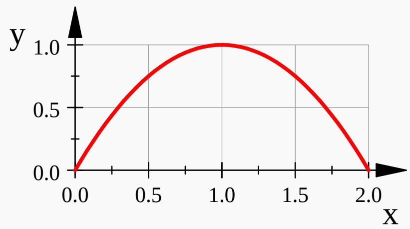
$$V_y = \int_a^b (2\pi x)\, y dx = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi^2$$



Exercice 16 Calculer le volume de solide formé par rotation autour de l'axe Ox de la figure limité par la parabole $y = 2x - x^2$ et l'axe Ox

Solution 16

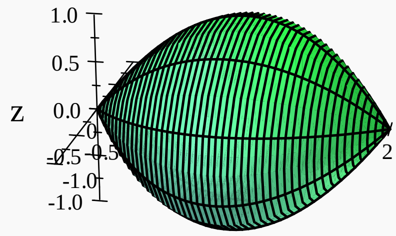
volume de solide formé par rotation $y = 2x - x^2$autour de l'axe Ox



$y = 2x - x^2$

La courbe $y = 2x - x^2$ coupe l'axe Ox en deux points : $x = 0$ et $x = 2$

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx = \frac{16}{15}\pi$$



Exercice 17 On désigne par $f(x)$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

1. Montrer que $f(x)$ s'exprime sous la forme $f(x) = Ax + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ où A, B, C sont des réels à déterminer.
2. Calculer, alors : $I = \int f(x)\,dx$.
3. En utilisant un changement convenable de varaible déduire $J = \int \tan^3 t dt$.

Solution 17

1. on démontre que $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$
   Soit par division eucludienne
   Soit par décomposition en éléments simples :
   $f(x) = Ax + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} \Longrightarrow A = 1, B = -1$ et $C = 0$
   ou bien $\dfrac{x^3}{1+x^2} = \dfrac{x^3+x-x}{1+x^2} = \dfrac{x\left(x^2+1\right)-x}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$
2. $I = \int f(x)\,dx = \int x dx - \int \dfrac{x dx}{1+x^2}$
   $= \int x dx - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2}$
   $= \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C_1$
3. $u = \tan t \Longrightarrow du = \left(1+\tan^2 t\right) dt$
   $\Longrightarrow dt = \dfrac{du}{1+u^2}$
   $J = \int \tan^3 t dt = \int \dfrac{u^3}{1+u^2} du$
   $= \dfrac{1}{2}u^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) + C_2$

$$= \frac{1}{2}\left(\tan^2 t - \ln\left(1+\tan^2 t\right)\right) + C_2$$
$$= \frac{1}{2}\tan^2 t + \ln\left(\cos t\right) + C_2$$

Exercice 18 Calculer, par changement de variable, les inégrales suivantes :

1. $I = \int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x^2+2x+2}}$
2. $J = \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

Solution 18

1. $I = \int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}}$

   $u = x+1 \Longrightarrow du = dx$

   $I = \int \frac{du}{u+\sqrt{1+u^2}}$

   $u = \sinh t \Longrightarrow du = \cosh t dt$ et $\sqrt{u^2+1} = \sqrt{\sinh^2 t+1} = \cosh t$

   $I = \int \frac{\cosh t dt}{\sinh t+\cosh t} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{-2t}$

   $\frac{\cosh t}{\sinh t+\cosh t} = \frac{e^t+e^{-t}}{\left(e^t-e^{-t}\right)+e^t+e^{-t}} = \frac{e^t+e^{-t}}{2e^t} = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}$

2. On pose $u = \sqrt{\cos x} \Longrightarrow du = -\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx$

   $J = \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx$

   $= -2\int \left(1-u^4\right)du = -2\left(u - \frac{u^5}{5}\right) + C = -\frac{2}{5}u\left(1-u^4\right) + C$

   $= -\frac{2}{5}\sqrt{\cos x}\left(1-\cos^2 x\right) + C$

Exercice 19 On considère les deux intégrales :

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad J(x) = \int \frac{x^5+x^3-x+1}{x^4+x^2}dx$$

1. Montrer que $I(x)$ s'exprime sous la forme $I = \int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x^2}dx$,puis calculer I
2. Montrer que $f(x) = \frac{x^5+x^3-x+1}{x^4+x^2}$ s'exprime sous la forme $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + cx + \frac{Ax+B}{x^2+1}$ et calculer J.

Solution 19

$I(x)$ a pour domaine de définition l'intervalle $D =]-1, 1[$

1. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)-(1-x^2)}$
$= \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x^2} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2}$

 – $J = \displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

 Posons $x = \sinh t \Longrightarrow \begin{cases} dx = \cosh t dt \\ \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t \end{cases}$

 $$J = \int \frac{\cosh^2 t}{\sinh^2 t}dt = \int \frac{1+\sinh^2 t}{\sinh^2 t}dt = \int \left(\frac{1}{\sinh^2 t}+1\right)dt$$

 $$= -\coth t + t + c = t - \frac{\cosh t}{\sinh t} + cte$$

 $$= \arg\sinh x - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + Cte = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + Cte$$

 – $K = \displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

 $x = \sin u \Longrightarrow \begin{cases} du = \cos u du \\ \sqrt{1-x^2} = \cos u \end{cases}$

 $$K = \int \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}du = \int \left(\frac{1}{\sin^2 u} - 1\right)du = -\cot u + u + m$$

 $$= -\frac{\cos u}{\sin u} - u + cte = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + cte$$

 $$I = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \arg\sinh x + C + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x - cte\right)$$

 $$-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}$$

$$I = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\arg\sinh x + cte$$

2. $J(x) = \displaystyle\int \frac{x^5+x^3-x+1}{x^4+x^2}dx$ $\quad J$ est définie sur $\mathbb{R}^*$

$$\frac{x^5+x^3-x+1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + x + \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + x + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$J = -\frac{1}{x} - \ln x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \arctan x + C$$

Exercice 20 :

1. Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

$$I=\int \frac{dt}{t^2(1-t)} \quad et \quad J=\int \frac{du}{u^3(1-u^2)}$$

2. Déduire de ce qui précède les intégrales suivantes :

$$K_1=\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x} \quad et \quad K_2=\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}.$$

3. On pose $K=\int \frac{dx}{\sin^3(2x)}$.Exprimer K en fonction deK_1 et K_2, et en déduire K.

Solution 20

1. $I=\int \frac{dt}{t^2(1-t)}$

$$\frac{1}{t^2(1-t)}=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t-1}$$

$$I=\int \frac{dt}{t^2(1-t)}=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$=\ln|t|-\frac{1}{t}-\ln|t-1|+C=\ln\left|\frac{t}{t-1}\right|-\frac{1}{t}+C$$

$$J=\int \frac{du}{u^3(1-u^2)}$$

$$\frac{1}{u^3(1-u^2)}=\frac{1}{u}+\frac{1}{u^3}-\frac{1}{2(1+u)}+\frac{1}{2(1-u)}$$

$$J=\int \frac{du}{u^3(1-u^2)}=\int\frac{du}{u}+\int\frac{du}{u^3}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{1-u}$$

$$=\ln|u|-\frac{1}{2u^2}-\frac{1}{2}\ln|1+u|-\frac{1}{2}\ln|1-u|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u^2}{u^2-1}\right|-\frac{1}{2u^2}+C$$

2. $K_1=\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=\int\frac{\cos x dx}{\sin^3 x\cos^2 x}=\int\frac{\cos x dx}{\sin^3 x\left(1-\sin^2 x\right)}$

On pose $u=\sin x \Longrightarrow du=\cos x dx \Longrightarrow K_1=\int\frac{du}{u^3(1-u^2)}$

donc $K_1=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u^2}{u^2-1}\right|-\frac{1}{2u^2}+C_1$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x-1}\right|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C_1$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C_1=\ln|\tan x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C_1$$

$$K_2=\int\frac{dx}{\sin x\cos^3 x}=\int\frac{\sin x dx}{\sin^2 x\cos^3 x}=\int\frac{\sin x dx}{\left(1-\cos^2 x\right)\cos^3 x}$$

$u=\cos x \Longrightarrow du=-\sin x dx \Longrightarrow K_2=-\int\frac{du}{u^3(1-u^2)}+C_2$

$$K_2 = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u^2}{u^2-1}\right| + \frac{1}{2u^2} + C_2$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - 1}\right| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C_2$$
$$= \ln|\tan x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C_2$$

3. $K = \int \frac{dx}{\sin^3(2x)} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x} = \frac{1}{8}\int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$
$$= \frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{\sin^3 x\cos x} + \frac{1}{\sin x\cos^3 x}\right)dx$$
$$= \frac{K_1+K_2}{8} = \frac{1}{8}\left(\ln|\tan x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C_1 + \ln|\tan x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C_2\right)$$
$$K = \frac{1}{4}\left(\ln|\tan x| - \frac{\cot 2x}{\sin 2x} + C\right)$$
Puisque : $-\frac{1}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2\cos^2 x} = -\frac{\cos 2x}{2\cos^2 x\sin^2 x} = -\frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x} = -2\frac{\cot 2x}{\sin 2x}$

Exercice 21 L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale indéfinie suivante

$$I = \int \frac{x^3}{(1+x^3)^2}dx$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante : $\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)}$.

   En déduire : $J = \int \frac{dx}{1+x^3}$
2. Calculer $K = \int \frac{x^2dx}{(1+x^3)^2}$
3. En utilisant une intégration par parties déduire la valeur de I.

Solution 21

1. Par décomposition en fractions simples on aura :
$$\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}$$
$$\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{x^2-x+1}\right)$$
On écrit x^2-x+1 sous forme d'un carré parfait
$$x^2-x+1 = x^2 - 2\frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{(2x-1)^2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$$
Alors :
$$\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}\right) = \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{2}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

D'où finalement :

$$\frac{1}{(1+x)\left(1-x+x^2\right)}=\frac{1}{3\,(x+1)}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{2}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3\,(x+1)}-\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{2/3}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

Remarquons que : $(1+x)\left(1-x+x^2\right)=1+x^3$ alors :

$$J=\int\frac{dx}{(1+x)\left(1-x+x^2\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$\int\frac{dx}{x+1}=\ln(x+1)$$

$$\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}=\ln\left(x^2-x+1\right)$$

$$\int\frac{2/3}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$J=\int\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+Ct^e$$

2. $K=\int\frac{x^2dx}{\left(1+x^3\right)^2}$

Posons $t=1+x^3\Longrightarrow dt=3x^2dx$

$\Longrightarrow K=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{3t}+C=-\frac{1}{3\left(1+x^3\right)}+C$

3. Intégration par parties de $I=\int\frac{x^3}{\left(1+x^3\right)^2}dx$

Soit : $\begin{cases} u=x\Longrightarrow du=dx \\ dv=\frac{x^2dx}{\left(1+x^3\right)^2}\Longrightarrow v=-\frac{1}{3\left(1+x^3\right)}\end{cases}$

d'où : $\left(I=uv-\int vdu\right)$

$I=-\frac{x}{3\left(1+x^3\right)}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{1+x^3}=-\frac{x}{3\left(1+x^3\right)}+\frac{1}{3}J$

Donc :

$$I=-\frac{x}{3\left(1+x^3\right)}+\frac{1}{9}\ln(x+1)-\frac{1}{18}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+Ct^e.$$

Exercice 22 On considère l'intégrale

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$$

1. Montrer, en faisant un changement convenable de variable, que

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$

2. Déduire la valeur de l'intégrale I.

Solution 22

1. On pose $x = \dfrac{\pi}{2} - t \Longrightarrow dx = -dt$

   $\sin(\dfrac{\pi}{2} - t) = \cos t$ et $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$

   Pour $x = 0 \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow t = 0.$

   Donc $I = -\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^3(\frac{\pi}{2} - t)}{\sin^3(\frac{\pi}{2} - t) + \cos^3(\frac{\pi}{2} - t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\cos^3 t + \sin^3 t} dt$

2. $I + I = 2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$

   $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow I = \frac{\pi}{4}.$

Exercice 23 Pour tout $n \in N$, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1 + x^2}} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} dx$$

1. Calculer I_1 et J_1
2. Montrer que $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+3}$
3. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'on a pour tout $n \in N$:

$$I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{(n+1)} J_n$$

Solution 23

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \sqrt{2} - 1$

   On pose $t = 1 + x^2 \Longrightarrow dt = 2x dx \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 & \rightarrow & t = 1 \\ x = 1 & \rightarrow & t = 2 \end{cases}$

   $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t}\Big|_1^2 = \sqrt{2} - 1$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2$$

on écrit $x^3 = x^2 x$, Soit $t = 1 + x^2 \Longrightarrow x^2 = t - 1$

$$dt = 2xdx \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \rightarrow & t = 1 \\ x = 1 & \rightarrow & t = 2 \end{cases}$$

$$J_1 = \int_1^2 \frac{t-1}{2t\sqrt{t}}dt = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t\sqrt{t}}\right)dt = \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2$$

2. $\forall x \in [0,1]$ on a $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$

$$\Longrightarrow 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n \Longrightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1+x^2}} \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\Longrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 \Longrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

De même pour J

$$\forall x \in [0,1] \text{ on a } 0 \leq \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \leq x^{n+2}$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \leq \int_0^1 x^{n+2}dx = \frac{x^{n+3}}{n+3}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+3}$$

3. $J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x x^{n+1}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$

$$\begin{cases} u = x^{n+1} & \Longrightarrow & du = (n+1)\,x^n dx \\ dv = \frac{xdx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx & \Longrightarrow & v = \int \frac{xdx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$$

$$J_n = -\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_0^1 + (n+1)\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + (n+1)\,I_n$$

$$\Longrightarrow I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{(n+1)}J_n$$

Exercice 24 Soit

$$I = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx \quad \text{et} \quad J = \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx$$

1. Calculer $I + J$ et $I - J$
2. Déduire I et J.

Solution 24

1. $I+J=\int \frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int dx=x+C$

$I-J=\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2}dx$

$=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x}dx=\int \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx=\frac{1}{2}\ln(\sin 2x+1)+C'$

Ou bien on peut utiliser la relation : $\frac{\cos(\pi/4+x)}{\sin(\pi/4+x)}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

plus simplement : on pose $u=\cos x+\sin x \Longrightarrow du=(-\sin x+\cos x)\,dx$

$\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int \frac{du}{u}=\ln u=\ln(\cos x+\sin x)+C$

2. $I=\frac{(I+J)+(I-J)}{2}=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln(\sin 2x+1)+k$

$J=\frac{(I+J)-(I-J)}{2}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ln(\sin 2x+1)+k'.$

Exercice 25 Soient les intégrales

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx \quad \text{et} \quad J=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan x)\,dx$$

1. Montrer que : $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$
2. Utiliser cette relation pour calculer I et J.

Solution 25

1. Posons $x=a+b-t \Longrightarrow \begin{cases} dt=-dx \\ x=a\rightarrow t=b \\ x=b\rightarrow t=a \end{cases}$

$\int_a^b f(x)\,dx=\int_b^a f(a+b-t)(-dt)=\int_a^b f(a+b-t)(dt)=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$

2. $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx-I$

$2I=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\pi^2 \Longrightarrow I=\frac{\pi^2}{4}$

$J=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan x)\,dx=\int_0^{\pi/4}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx=\int_0^{\pi/4}\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx$

$=\int_0^{\pi/4}\ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx=\int_0^{\pi/4}\ln(2)\,dx-\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan x)\,dx$

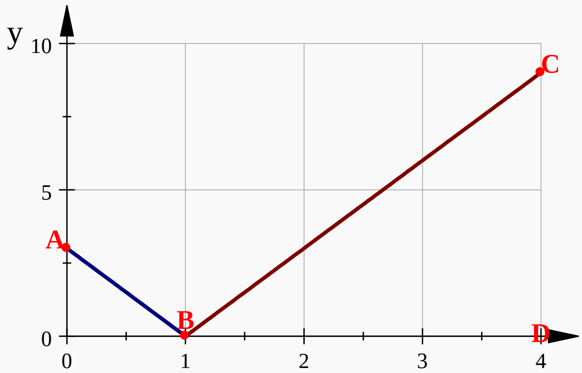
$$2J = \ln(2)\, x|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}\ln 2 \Longrightarrow J = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

Exercice 26 Dans le plan (xOy) on considère les segments des droites $[AB]$ et $[BC]$ tels que $A(0,3)$, $B(x,0)$, $C(4,9)$ et $0 \leq x \leq 4$

1. Représenter graphiquement les points A, B, C et les segments $[AB]$ et $[BC]$.
2. Déterminer la valeur de x, abscisse du point B, d'une façon que la longueur du trajet ABC soit minimal.
3. Déterminer les équations des droites (AB) et (BC)
4. Calculer le volume du solide obtenu par rotation autour de l'axe Ox de la zone limitée par l'axe ox et les segments $[AB]$ et $[BC]$.

Solution 26

1. $A(0,3)$, $B(x,0)$ et $C(4,9)$



2. D'après le théorème de Pythagore :
$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 = 9 + x^2$
$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 = (4-x)^2 + 81 = x^2 - 8x + 97$
La longueur de ABC est $L = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{(4-x)^2 + 81}$
L est minimale si $\dfrac{dL}{dx} = 0$
$$\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2}(2x)\left(x^2+9\right)^{-1/2} + \frac{1}{2}(2(4-x))\left((4-x)^2+81\right)^{-1/2}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+81}}$$
$$\frac{dL}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+81}} = 0$$
$$\Longleftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+81}}$$
$$\Longleftrightarrow (x-4)^2\left(x^2+9\right) = x^2(4-x)^2 + 81x^2$$
$$x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 72x + 144 = x^4 - 8x^3 + 97x^2$$

$\Longrightarrow 72x^2 + 72x - 144 = 72\,(x+2)\,(x-1) = 0$

comme $x \in [0,4]$ alors la solution est $x = 1$.

3. L'équation de la droite joignant les points $A\,(3,0)$ et $B\,(0,1)$ est $y = -3\,(x-1)$.
   L'équation de la droite joignant les points $B\,(0,1)$ et $C\,(4,9)$ est $y = 3\,(x-1)$.
4. La rotation de la courbe $y = f\,(x)$ autour de l'axe Ox détermine un volume de révolution. Chaque point $M\,(x,y)$ de la courbe décrit, dans une section plane, un cercle centré sur l'axe Ox et de rayon $R = y = f\,(x)$, l'aire du cercle est $S = \pi y^2$, le volume du cylindre élémentaire de hauteur dx est $dV = \pi y^2 dx$, par suite le volume du corps de révolution est :

$$V_X = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Le volume de révolution de la zone limité par AB et l'axe Ox est :

$$V_1 = \pi \int_0^1 9\,(x-1)^2\,dx = 3\pi$$

Le volume de révolution de la zone limité par BC et l'axe Ox est :

$$V_2 = \pi \int_1^4 9\,(x-1)^2\,dx = 81\pi$$

Le volume total est $V = V_1 + V_2$

$$V = 3\pi + 81\pi = 84\pi$$